

**Jornadas
Nacionales
de Educación
Matemática**

10 al 12 de diciembre 2025

Actas Preliminares

Actas Preliminares

XXIX Jornadas Nacionales De Educación Matemática

INTRODUCCIÓN

Las conferencias descritas en el presente documento tienen como propósito enriquecer las discusiones y favorecer la reflexión en torno a las ponencias internacionales y nacionales que conforman el programa de la XXIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Esta acta preliminar busca ofrecer una visión general de los aportes que serán presentados, con el fin de que la participación en el evento resulte fructífera, significativa y formativa para todas y todos los asistentes.

COMITÉ ORGANIZADOR

Dra. Daniela Araya Bastias, directora de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.

Dra. Tania Andrade Vega, directora (I) de la carrera de Pedagogía en Educación General Básica, mención matemática. Universidad Central de Chile.

Dr. Nicolás Sánchez Acevedo, académico de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.

Mg. Claudio Zamorano Sánchez, académico de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.

Mg. Carlos Gallegos Lastra, académico de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.

Mg. Javiera Herrera Pérez, académica de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.

Mg. José Galaz Arraño, académico de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.

Dr. Sergio Morales Candia, académico de la Universidad de Concepción. Vicepresidente de SOCHIEM.

Página Web y redes sociales:

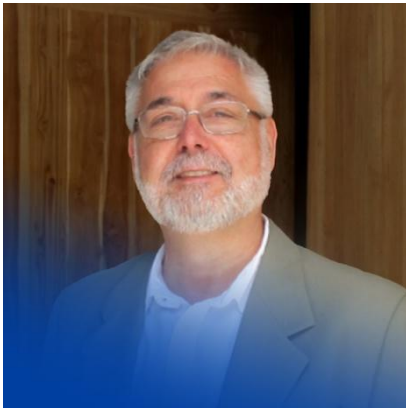
<https://jnem2025.ucentral.cl/> ; Instagram: @xxix_jnem_2025

I. CONFERENCISTAS INTERNACIONALES

Para las XXIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática contaremos con la participación de distinguidos invitados internacionales, quienes compartirán sus conocimientos y experiencias en el campo de la Educación Matemática.

Dr. Vincenç Font Moll

Universitat de Barcelona, España.



Profesor titular del Departamento de Educación Lingüística y Literaria, y Didáctica de las *Ciencias* Experimentales y la Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Barcelona. Líder del grupo de investigación “Didáctica de les matemàtiques i formació del professorat en STEM i interdisciplinarietat” y miembro del Instituto de Investigación en Educación (IRE por sus siglas en catalán).

Dra. Liliana Tauber

Universidad Nacional Litoral, Argentina



Profesora Titular de Estadística de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional Litoral de Argentina. Directora del grupo de investigación Estocastic@s y presidenta de la Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIEE).

Dra. María Trigueros

Universidad Autónoma de Puebla, México.



Licenciada en Física por la Universidad Autónoma de México y Dra. en Física por la Universidad de Berkeley. Dra. en Educación de la Universidad Complutense de Madrid, Posdoctorada en Matemática Educativa del Cinvestav. Professor at Benemérita de la Universidad Autónoma de Puebla, México. Su línea de investigación es la Matemática Educativa y la Enseñanza de las Ciencias.

Dr. Laurent Vivier

Universidad de París, Francia.



Maître de conférences con Habilitation à Diriger des Recherches (HDR) en la Université de Paris y miembro del Laboratorio de Didáctica André Revuz (LDAR). Es doctor en didáctica de las matemáticas de la Universidad de Tours de Francia y es especialista en formación de formadores de profesores de matemáticas. Sus principales líneas de investigación se centran en la didáctica del número, la didáctica del análisis y la modelización matemática.

II. CONFERENCISTAS NACIONALES

En el marco de las XXIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática, se contará con la valiosa participación de destacados/as académicos/as nacionales que compartirán sus experiencias y reflexiones en diversas áreas de la Educación Matemática:

Dr. Horacio Solar Bezmalinovic – *Pontificia Universidad Católica de Chile*

Áreas temáticas: Competencias Matemáticas de Argumentación y Modelación, Desarrollo Profesional Docente y *Noticing* Docente en Matemáticas

Dr. Felipe Ruz Ángel – *Universidad Católica de Valparaíso*

Área temática: Estadística

Dr. Alex Montecino Muñoz – *Universidad de Tarapacá*

Área temática: Educación Matemática Crítica

Dra. Paola Ramírez González – *Universidad Católica del Maule*

Área temática: Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática en la Primera Infancia

Dr. Carlos Vanegas Ortega – *Universidad de Santiago de Chile*

Área temática: Formación Práctica de Profesores de Matemática

Dra. Carolina Henríquez Rivas – *Universidad Católica del Maule*

Área temática: Formación de Profesores y Espacio de Trabajo Matemático

Dra. Marcela Parraguez González – *Universidad Católica de Valparaíso*

Área temática: APOE – Álgebra Lineal

Dra. María Aravena Díaz – *Universidad Católica del Maule*

Área temática: STEM – Interdisciplinariedad

Dra. Carmen Cecilia Espinoza Melo – *Universidad Católica de la Santísima Concepción*

Área temática: Inclusión y Diversidad en Educación Matemática

III. JORNADA SATÉLITE

Se considerará una Jornada Satélite el día martes 9 de diciembre desde las 16.00 hrs hasta las 17.30 hrs por medio de la plataforma Teams, el link será enviado a todos los inscritos en el evento un día antes. El taller titulado “Postulación y Diseño de Proyectos de Fondecyt de Iniciación” será impartido por el Dr. Horario Solar de la Pontificia Universidad Católica de Chile.

Descripción del Taller

Este taller entregará orientaciones clave para la elaboración de proyectos Fondecyt de Iniciación con foco en la Didáctica de la Matemática. A partir de los criterios de evaluación del concurso y de ejemplos de tensiones frecuentes en investigaciones del área, se revisarán aspectos fundamentales como la formulación del problema, la revisión crítica de la literatura, la construcción del marco teórico y la coherencia metodológica. El propósito es ofrecer herramientas prácticas para fortalecer la calidad y pertinencia de propuestas de investigadores e investigadoras en etapa inicial.

Dr. Horacio Solar Bezmalinovic

Pontificia Universidad Católica, Chile.



Profesor asociado de la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile y Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universitat Autònoma de Barcelona. Fue miembro y director del Grupo de Estudio Fondecyt en Educación Superior (2022–2024). Actualmente dirige el Departamento de Didáctica y es editor asociado de *Educación Matemática*, RECHIEM y REXE. Sus investigaciones se enfocan en argumentación y modelación matemática, competencias profesionales docentes (*noticing*) y

liderazgo de profesores de matemática.

INTRODUCCIÓN ACTAS CONFERENCISTAS INTERNACIONALES

Las XXIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática, organizadas por la Sociedad Chilena de Educación Matemática (SOCHIEM) y la Universidad Central de Chile, constituyen un espacio privilegiado para la reflexión, el diálogo y la actualización en torno a los desafíos contemporáneos de la disciplina. En un contexto en que la formación docente, la investigación didáctica y la innovación curricular adquieren un rol central para el fortalecimiento del sistema educativo, la presencia de conferencistas internacionales enriquece profundamente la discusión académica y permite vincular las experiencias nacionales con desarrollos relevantes a nivel global.

En esta edición, se cuenta con la participación de cuatro destacadas figuras de la Educación Matemática, cuyos aportes han tenido significativo impacto en diversas líneas de investigación del campo. El Dr. Vincenç Font Moll (Universitat de Barcelona) ha contribuido de manera sostenida al estudio de la modelización matemática, la formación del profesorado y la interdisciplinariedad en STEM. La Dra. Liliana Tauber (Universidad Nacional del Litoral) es referente latinoamericana en didáctica de la estadística, liderando redes de investigación y desarrollos teóricos sobre pensamiento estocástico. Por su parte, la Dra. María Trigueros (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla) ha realizado aportes fundamentales en matemática educativa, particularmente en la relación entre enseñanza de las ciencias, diseño didáctico y construcción conceptual. Finalmente, el Dr. Laurent Vivier (Université de Paris) se ha especializado en didáctica del número, del análisis y en la formación de formadores, ofreciendo perspectivas clave para comprender la complejidad del trabajo docente.

Las conferencias aquí recopiladas reflejan la diversidad temática y la riqueza epistemológica de la Educación Matemática contemporánea. Confiamos en que estas actas servirán como un recurso valioso para investigadores, docentes y estudiantes interesados en profundizar sus comprensiones y proyectar nuevas líneas de trabajo en beneficio de la comunidad educativa.

A continuación, presentamos las cuatro conferencias de los investigadores:

Dra. María Trigueros
Dra. Lilian Taubert
Dr. Vincenç Font Moll
Dr. Laurent Vivier.

LA MODELACIÓN Y TEORÍA APOE: UNA FORMA DE ACERCARSE AL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

María Trigueros - mtriguerosg@gmail.com

Universidad Autónoma de Puebla, México

Abstract:

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es conocida por su utilidad para analizar la comprensión de los estudiantes de los conceptos matemáticos y para diseñar actividades que permitan la construcción del conocimiento matemático. (REF) La modelación, por su parte, es una metodología que ha llamado la atención en los últimos años como estrategia de enseñanza de esta disciplina. Surgen de aquí dos preguntas fundamentales: ¿Es posible diseñar estrategias de enseñanza de la modelación en el contexto? ¿Cómo se puede incorporar el trabajo con situaciones reales o de otras disciplinas al estudio de la comprensión de los conceptos matemáticos en el marco de la teoría APOE?

En este artículo trataré de responder a estas dos preguntas. Presentaré las ideas básicas de la teoría APOE y su uso en el estudio del aprendizaje de los estudiantes. A partir de ello, discutiré la importancia de la modelación como una forma de apoyar la construcción del conocimiento matemático utilizando problemas de interés para los estudiantes de diversos niveles educativos, Reflexionaré sobre su compatibilidad y su interrelación natural con la enseñanza de las matemáticas en términos de los postulados de la teoría. Discutiré cómo se puede incorporar la idea de modelación al marco de la teoría APOE y cómo esta combinación permite el diseño de tareas apropiadas para un aprendizaje significativo de las matemáticas que puedan utilizar en clase. A través de una concatenación de ciclos de modelación y de ciclos enseñanza coherentes con la teoría APOE es posible observar cómo las ideas que surgen del modelo favorecen o se integran con las construcciones matemáticas y, en ocasiones, les dan sentido. Trataré, además, de presentar la posibilidad de utilizar esta integración metodológica en la formación y actualización de los maestros.

Modelación Matemática, teoría APOE, Educación Matemática, Formación de Profesores.

LA TEORÍA APOE

La teoría APOE, basada en la epistemología de la construcción del conocimiento de Piaget (REF) fue concebida por el Dr. Ed Dubinsky en las décadas finales del siglo XX (Arnon et al., 2014). Siendo la teoría APOE una propuesta para comprender la construcción de los conceptos matemáticos, parte de una definición propia de lo que se considera el conocimiento matemático. Esta definición proporciona una base conceptual coherente con sus fundamentos epistemológicos que le proporciona una coherencia que no tienen todas las teorías de la educación matemática. La definición establece que:

El conocimiento matemático de una persona es su tendencia a responder ante situaciones problemáticas matemáticas percibidas, reflexionando sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social, y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos, organizándose en esquemas para utilizarlos en el abordaje de dichas situaciones. (Asiala et al., 1996, p. 7).

Este principio establece además que el aprendizaje matemático se da de forma activa por parte del sujeto en un contexto social y en concordancia con ello considera una relación dialéctica entre sujeto-objeto de conocimiento y, con base en ello, propone la unidad de los aspectos cognitivos y matemáticos de la teoría en un contexto social.

La selección en APOE de los objetos de estudio no es arbitraria, se basa en su relevancia epistemológica, en su complejidad cognitiva, atendiendo a lo reportado en la literatura en Educación Matemática y a la consideración de su importancia en la enseñanza, su dificultad a partir de la consideración de los profesores y de su papel fundamental en un dominio matemático y en su aplicabilidad en la resolución de problemas dentro del dominio matemático o de otras disciplinas. Por su parte, los constructos elementales de la teoría: Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE) permiten analizar la forma en que las matemáticas se construyen, es decir, se aprenden, y se pueden enseñar de manera efectiva (Arnon et al., 2014).

A partir de hacer Acciones sobre un Objeto previamente construido y de reflexionar sobre ellas, dichas Acciones se interiorizan en un Proceso que se caracteriza por la posibilidad del estudiante de reproducir las Acciones sin necesidad de apoyarse en recursos externos y la capacidad de predecir el resultado de su aplicación. Cuando un estudiante ha construido un concepto como un Proceso puede regresar a las Acciones que le dieron origen y es capaz de coordinarlo con otro Proceso obteniendo como resultado un nuevo Proceso. Cuando el estudiante requiere operar sobre el Proceso y considera formas de hacerlo, el Proceso se encapsula en un Objeto sobre el cual el estudiante puede aplicar nuevas Acciones tales como compararlo con otros Objetos o determinar sus propiedades matemáticas. A partir de estos constructos es posible encontrar evidencias en el trabajo de los estudiantes del paso de un nivel otro de conocimiento en el marco de un concepto o tema matemático mediante los mecanismos de abstracción reflexiva (Arnon et al., 2014).

El Esquema no es, como en muchos estudios se muestra, una construcción que sigue a la del Objeto. Es decir, el nivel de abstracción en el que se estudia el Esquema no es el mismo en el que se estudia la progresión Acción, Proceso, Objeto. El Esquema se estudia considerando las estructuras que los componen: Acción, Proceso, Objeto y otros Esquemas y analizando los distintos tipos de relación que se van construyendo de manera progresiva y que permiten determinar su nivel de construcción Intra-, Inter-, y Trans- (Piaget y García, 1982). De acuerdo con estos autores, puede definirse al Esquema como un conjunto coherente de conocimientos que un sujeto genérico evoca cuando enfrenta un problema y que están en

constante evolución. Los niveles dan evidencia de las relaciones evocadas por el sujeto en un momento determinado y pueden identificarse como de correspondencia, de transformación y de conservación. Los esquemas evolucionan constantemente conforme el sujeto sigue aprendiendo. y los niveles que dan cuenta de dicha evolución se modifican mediante la evolución de las relaciones y mediante la asimilación o la acomodación de nuevas estructuras mediante relaciones con las previamente construidas.

En el proceso de construcción de conocimiento los Esquemas se modifican continuamente. El nivel Intra- se identifica porque los estudiantes enfocan la atención en componentes aislados y pueden establecer relaciones de correspondencia, caracterizadas por su uso en la comparación de las estructuras, por sus semejanzas o diferencias y por la necesidad de usarlas en problemas similares. En el nivel Inter- los estudiantes muestran que reconocen algunas relaciones de transformación, es decir, descubren que algunas estructuras se pueden relacionar a través de cambios en otras estructuras, e identifican algunos grupos de estructuras relacionadas entre sí. El nivel Trans- se identifica porque los estudiantes construyen algunas relaciones de conservación o el reconocimiento implícito o explícito de una estructura subyacente a algunos componentes del Esquema, de manera que las relaciones construidas en el nivel Inter- se coordinan y se entienden. El Esquema construido es entonces coherente. Los estudiantes que construyen el Esquema en este nivel son capaces de reconocer qué problemas pueden resolverse con ese Esquema y cuáles no. El Esquema puede entonces tematizarse en un nuevo Objeto que puede ser estudiado con Acciones, Procesos y Objeto (Arnon et al., 2014, Trigueros et al., 2024).

Cuando se trabaja con la teoría APOE es necesario establecer una relación entre la epistemología de los conceptos y su construcción cognitiva. Para lograrlo, en APOE se define un modelo epistemológico explícito de dicha construcción llamado Descomposición Genética (DG) que describe las construcciones necesarias en la construcción de un concepto junto con los mecanismos correspondientes a cada una de ellas. La DG debe evaluarse experimentalmente y, dependiendo de los resultados pueden validarse, refinarse o desecharse. La DG pueden basarse también en resultados de investigaciones previas, en la epistemología del concepto, en la historia de la matemática y/o en la propia experiencia de los investigadores. La DG se utiliza para desarrollar instrumentos de investigación, para analizar los resultados obtenidos en ella y para desarrollar actividades de enseñanza.

Si bien la teoría APOE ha sido utilizada mayormente en el estudio de conceptos ligados a la matemática a nivel universitario, cada vez aparecen más estudios en los que se atiende exitosamente la construcción de conocimiento matemático con estudiantes de otros niveles educativos. (Arnon, et al., 2014, REFS).

YA: (FUE EL PRIMERO) LA MODELACIÓN O MODELIZACIÓN EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Entre los muchos acercamientos al estudio de la educación matemática, el uso de modelos de fenómenos naturales y sociales ha llamado la atención y el interés de los investigadores (i.e. Leung et al., 2021; Guerrero-Ortiz C. & Camacho-Machín, 2022). Por más de una década los investigadores han analizado, desde distintas perspectivas, los beneficios y las limitaciones del uso de este tipo de enseñanza en la motivación de los estudiantes y en la promoción de la comprensión de los conceptos matemáticos. (i. e. Boaler, 2001; Villa- Ochoa et al., 201; Trigueros, 2019). La investigación en esta dirección ha incidido en la búsqueda de nuevas estrategias de enseñanza de las matemáticas que permitan a estudiantes con diferentes intereses acercarse a ellas de diversas maneras (i. e. Lesh & Lehrer, 2003; Rasmussen, et al., 2012). Estos estudios sugieren que la motivación debe acompañarse de estrategias basadas en resultados de investigación sobre la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas y, en el caso que nos interesa, que aprovechen la modelación para promover dicho conocimiento (Czoher, 2017, Rowland & Jovanoski, 2020).

En términos de la investigación, las cuestiones que se plantean, en este contexto, tienen que ver con ¿Cómo utilizar la modelación para acercar a los estudiantes a las matemáticas? ¿Qué puede aportar la introducción de los conceptos a través del uso de modelos al aprendizaje de las matemáticas? ¿Cómo lograrlo? ¿Qué problemas específicos se deben elegir? ¿Qué características deben tener? La respuesta a estas preguntas no es fácil ni es única. En este trabajo discutiré una forma en que puede utilizarse la modelación con el objetivo de favorecer en los estudiantes las construcciones que conlleven a una comprensión profunda de los conceptos matemáticos en cuestión.

Distintas perspectivas de la Modelación

Entre los muchos acercamientos al estudio de la educación matemática, el uso de modelos de fenómenos naturales o sociales ha llamado la atención y el interés de los investigadores (i.e. ¿?, 2021; Guerrero-Ortiz C. & Camacho-Machín, 2022). Por más de una década los investigadores han estudiado, desde distintas perspectivas, los beneficios y las limitaciones del uso de este tipo de enseñanza en la promoción de la comprensión y del conocimiento matemático. (i. e. Borromeo Ferri, 2006; Villa- Ochoa et al., 2018). Estos fenómenos han incidido en la búsqueda de nuevas estrategias de enseñanza de las matemáticas que permitan a estudiantes con diferentes intereses acercarse a ellas de diversas maneras (i. e. Lesh & Lehrer, 2003; Rasmussen, et al., 2012). estudios que sugieren que la motivación debe acompañarse de estrategias basadas en resultados de investigación sobre la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas y, en el caso que nos interesa, que aprovechen la modelación para promover dicho conocimiento (Czoher, 2017, Rowland & Jovanoski, 2020).

En términos de la investigación, las cuestiones que se plantean, en este contexto, tienen que ver con ¿Cómo utilizar la modelación para acercar a los estudiantes a las matemáticas? ¿Qué puede aportar la introducción de los conceptos a través del uso de modelos al aprendizaje de las matemáticas? ¿Cómo lograrlo? ¿Qué problemas específicos se deben elegir? ¿Qué características deben tener? La respuesta a estas preguntas no es fácil ni es única. En este trabajo discutiré una forma en que puede utilizarse la modelación con el objetivo de favorecer en los estudiantes una comprensión profunda de los conceptos matemáticos en cuestión.

Conforme el uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas se ha extendido, han surgido discusiones acerca de la forma en que deben o pueden enseñarse. Por una parte, hay investigadores que consideran que si se pretende modelar es importante utilizar problemas reales que puedan abordarse en el aula conjuntamente con la introducción de las técnicas de modelación matemática los estudiantes (Blum & Borromeo, 2009). Otros investigadores opinan que los problemas a utilizar deben ser reales, aunque acotados de tal manera que sus objetivos sean claros y limitados para tener cabida en la enseñanza (Keiser, et al., 2006, Leung et al., 2021). Otras posturas aceptan el uso de problemas que se relacionan con los problemas reales, pero que se diseñan de manera tal que puedan ajustarse a las necesidades del aprendizaje de conceptos específicos y a las de los estudiantes. En estas posturas se acepta el uso de problemas “realistas” (Rasmussen, et al., 2012), es decir, situaciones en las que el problema a modelar es una situación imaginaria, pero que sea tal, que los estudiantes puedan hacerla suya como si lo fuera y emplear la modelación para comprenderla y resolver los problemas que plantea.

Desde nuestro punto de vista, más que el tipo de problemas a utilizar, lo importante es que permitan responder las tres preguntas siguientes: ¿Qué aspectos del conocimiento matemático se pueden recuperar y mejorar a través del uso del problema a modelar? ¿Cómo diseñar problemas de modelación adecuados a los conocimientos previos de los estudiantes y al conocimiento que se desea desarrollar? y ¿Cuáles aspectos del conocimiento matemático pueden desarrollarse durante el proceso de modelación? y ¿Cómo pueden entrelazarse las ideas que surgen de los estudiantes durante ese proceso con estrategias que permitan ahondar en el conocimiento emergente sin romper el flujo de las ideas que promueve la modelación?

Una forma de acercarse a la Modelación

Nuestra motivación en el uso de modelos en la clase de matemáticas se relaciona, por una parte, en la importancia de promover la reflexión sobre los conceptos matemáticos y su relación con fenómenos en distintos entornos y fortalecer, por otra parte, el trabajo colaborativo de los estudiantes a través de la discusión de un problema que les resulte interesante y de la reflexión sobre sus conocimientos, matemáticos y extra- matemáticos. previamente construidos. Este es el punto de partida de un proceso en el que la discusión y la reflexión estén presentes de tal forma que la introducción de las matemáticas a enseñar

resulte de una necesidad y no sea una imposición. En estos términos la discusión que suscita el problema permite reconocer el uso de las matemáticas en otras disciplinas y en entornos diversos y, además, da pie a dar sustento a la introducción y construcción de un nuevo concepto, o grupo de conceptos para los estudiantes. El contenido es, generalmente, parte del programa del curso de matemáticas que se está impartiendo. El modelo desarrollado inicialmente sirve así de sustento al trabajo matemático y proporciona elementos para ofrecer oportunidades de construir nuevo conocimiento. Para ello se utilizan las herramientas de la teoría APOE que han demostrado ser exitosas en la promoción del aprendizaje de los estudiantes.

Cuando se inicia un tema utilizando un modelo, el trabajo colaborativo de los estudiantes, apoyados por el profesor, da lugar al inicio de un ciclo de modelación. Durante su trabajo, los estudiantes requerirán probablemente algo que no conocen o no conocen a fondo. La curiosidad que surge de la necesidad de continuar con el trabajo, como propone Harel (2010) en su modelo de aprendizaje, permite introducir un ciclo de enseñanza propuesto por la teoría APOE en su metodología didáctica, que se presentará a continuación. Estos dos ciclos se van intercalando durante el trabajo en clase, obedeciendo a las necesidades de los estudiantes. hasta terminar con un modelo que permite resolver, de alguna manera, problema inicial.

Así, la construcción del concepto o conceptos nuevos para los estudiantes, como se ejemplificará más adelante, requiere de desarrollar un modelo didáctico específico que permite a los profesores diseñar o utilizar actividades diseñadas con la teoría APOE que apoyan la construcción de nuevo conocimiento de acuerdo a las necesidades de los estudiantes. Así, el ciclo de modelación se engarza con un ciclo de enseñanza específico en el que se intenta propiciar la reflexión de los estudiantes de tal forma que se construya colaborativamente el conocimiento deseado.

El diseño tanto de los problemas de modelación cuanto de las actividades desarrolladas con base en la teoría APOE, requieren de un trabajo colaborativo previo entre maestros que buscan y diseñan actividades de modelación interesantes para los estudiantes, o se utilizan modelos y preguntas diseñadas con el mismo fin por otros maestros que se analizan previo a su puesta en marcha. Se preguntan qué aspectos del conocimiento matemático de los estudiantes pueden ser susceptibles de inducir la necesidad de los conceptos matemáticos deseados y cómo podría el profesor responder a las necesidades de los estudiantes y así diseñar actividades que les apoyen en su labor.

El uso de esta estrategia de modelación permite utilizar las ventajas que el trabajo sobre un modelo ofrece al tiempo que se abre la oportunidad a los estudiantes de construir conocimiento a lo largo del proceso de trabajo. La modelación se entiende como un contexto para pensar en el papel de las matemáticas en la sociedad en que vivimos y aprender matemáticas a profundidad, tanto en la universidad cuanto en otros niveles escolares. Este

acercamiento promueve la motivación de los estudiantes, pero no se queda ahí. Este tipo de modelación proporciona un Se hace patente ambiente propicio para recuperar ideas previas de los estudiantes y para introducir nuevos conceptos. En particular juega un papel fundamental como un medio en el que: se propicia la aparición de necesidades conceptuales de los estudiantes, se estimula la discusión y el aprendizaje y es posible favorecer el uso de la tecnología. Todo ello, en la práctica, permite la creación de un ambiente estimulante de aprendizaje en el que las matemáticas permeen.

Durante el trabajo colaborativo en equipo y durante la discusión grupal guiada por el profesor, el docente sigue el trabajo de los estudiantes, les plantea preguntas con el fin de motivar las discusiones o inducir la reflexión sobre ideas pertinentes e importantes que surgen en la discusión. De esta manera el profesor puede recuperar los conocimientos previos, las ideas incorrectas y las ideas que potencian el desarrollo del modelo o de los conceptos a aprender, así como el uso que los estudiantes hacen de ideas de sentido común informado o de su conocimiento de otras disciplinas. Esta posibilidad de observación participante permite al profesor jugar un papel importante como un agente que estimula la reflexión, la creatividad y la construcción de relaciones entre los conocimientos de los estudiantes al tiempo que promueve la construcción de relaciones entre distintos conceptos matemáticos y de éstos con los de otras disciplinas.

Podría parecer que lo que se ha planteado hasta aquí es una posición muy ambiciosa, pero congruente con los objetivos de la educación matemática. No siempre es posible lograr todo lo esperado, pero la experiencia y la posibilidad de refinar los modelos y las actividades abren las puertas a dicha posibilidad.

Los Modelos en la teoría APOE

La modelación no se introdujo originalmente en el marco teórico de APOE, sin embargo, la modelación es consistente con las estructuras de APOE. metodológicamente con ella, dado que, cuando los estudiantes se encuentran ante un problema de modelación utilizan Esquemas previamente contruidos tanto en el ámbito de las matemáticas, como en otras disciplinas o a través de diversas experiencias. Una forma de integrar la modelación en términos generales a la metodología de APOE es considerar una descomposición genética que propone las construcciones que se requieren para afrontar un problema de modelación. En este sentido puede considerarse que frente a estos problemas los estudiantes pueden coordinar Esquemas contruidos previamente con otros Esquemas desarrollados durante el aprendizaje de otras disciplinas y/o de experiencias de su vida diaria para afrontar el problema. Los estudiantes toman de esos Esquemas elementos que les permiten elegir variables y formular hipótesis sobre el posible comportamiento de la solución esperada. A través de Acciones o Procesos sobre Objetos y mediante la coordinación de Procesos es posible construir un "modelo" matemático como Proceso que puede encapsularse en un Objeto o constituir un nuevo

Esquema. Nuevas Acciones sobre el Objeto “modelo”, o la construcción de relaciones entre las componentes del modelo como Esquema, permiten determinar sus propiedades y, mediante su desarrollo, la posibilidad de encontrar soluciones al problema de modelación planteado o proponer nuevas preguntas.

El trabajo en el trabajo en el modelo permite que los estudiantes enfrenten nuevas necesidades conceptuales que, mediante trabajo con la teoría APOE, pueden conducirlos a la construcción de nuevos Procesos y Objetos matemáticos que permiten el desarrollo y la solución de las preguntas formuladas en el modelo en cuestión y, posiblemente la aparición de nuevas preguntas que podrían contribuir al desarrollo del problema o considerarse como un nuevo problema de modelación. El trabajo que se realiza se ajusta a la metodología de investigación y a la metodología de enseñanza de la teoría APOE, como se verá más adelante.

METODOLOGÍA DE LA TEORÍA APOE

La teoría APOE tiene su propia metodología de investigación y su propia metodología de enseñanza. La metodología de investigación requiere del diseño de una descomposición genética de cada uno de los conceptos que se desea construir. El modelo se pone a prueba mediante el diseño de actividades para propiciar la construcción de cada una de sus componentes para ser empleadas en el salón de clases.

La teoría APOE tiene también su propia metodología de enseñanza, conocida como ciclo ACE que se refiere a trabajo colaborativo en pequeños grupos tanto en la etapa de modelación como en el trabajo sobre actividades matemáticas (A), discusión entre todos los alumnos de la clase y con el maestro para comparar modelos, procedimientos y, cuando es pertinente, introducir o aclarar conceptos matemáticos (C) y trabajo en ejercicios de tarea (E). Este ciclo se repite varias veces durante cada clase. Esta metodología se utilizó en la enseñanza de los problemas que se ejemplifican a continuación.

Los Modelos, diseños y puesta en práctica

Los problemas de modelación se desarrollan en general por un equipo formado por matemáticos y por investigadores en educación matemática. Los problemas se trabajan en clase para analizar su funcionamiento y se prueban experimentalmente. Durante la experimentación los miembros del equipo funcionan como profesores y se incorpora otro miembro como observador y apoyo en la toma de datos. Algunos de los problemas de modelación diseñados se crearon en el grupo de trabajo antes mencionado, en otros casos se tomó algún ejercicio de algún texto y se modificó de manera que la situación referida quedara abierta y pudiera ser abordada en términos de un modelo. A continuación, se ilustra con un ejemplo específico cómo se lleva a cabo la modelación en el contexto de la teoría APOE.

Un ejemplo. El caso de los pesticidas

En una parcela se rocían pesticidas sobre las plantas para eliminar insectos dañinos. Las plantas absorben una fracción de esos pesticidas. Cuando los animales herbívoros se alimentan de esas plantas absorben una cierta cantidad de esos pesticidas ¿Cómo podemos determinar la cantidad de pesticida absorbida por un herbívoro? Si además consideramos que algunos animales carnívoros (como los humanos) consumen carne de esos animales herbívoros ¿Cómo podemos determinar la cantidad de pesticida absorbida por un carnívoro? (adaptado de Kolman 2013, pág. 25, ejercicio 11).

Este modelo tiene como objetivo estimular en los estudiantes la construcción del concepto de matriz y del producto de matrices y la relación de las matrices con las transformaciones lineales. Para ello, se desarrolló una Descomposición Genética para estos conceptos y se desarrollaron tres conjuntos de actividades basadas en la DG para acompañar la introducción de los conceptos antes mencionados tomando en consideración los resultados de sus dos primeras puestas en práctica. Los datos que aquí mostramos corresponden a una aplicación por dos profesores y son similares a los de otras aplicaciones (Figuroa et al., 2018). La experiencia se llevó a cabo en cuatro sesiones de clase de dos horas cada una.

En cada aplicación, los estudiantes trabajaron en pequeños grupos con el problema abierto y en casi todos formularon tres distintas estrategias para abordarlo: uso de árboles de decisión, uso de probabilidades y uso de tablas. Tres investigadores recogieron datos grabados de las sesiones, de la bitácora de los profesores y de los resultados del trabajo en cada sesión entregados por cada uno de los estudiantes y un resumen del trabajo del equipo al final de ésta.

ALGUNOS RESULTADOS

Discusión del problema. Ciclo de Modelación 1

El problema interesó a los estudiantes en cada una de las ocasiones en las que se ha empleado. Los estudiantes proponen opiniones acerca de los factores importantes a tomar en consideración y usan su experiencia cotidiana y sus conocimientos previos para explorar y comprender el problema. En estos casos, recurrentemente los estudiantes han comenzado a discutir formas de tratar de resolverlo. Por ejemplo: carnívoro

S15: Podemos dibujar un árbol. Cada carnívoro come pesticida dependiendo de los herbívoros han comido y que vienen de las plantas rociadas. Cada uno sigue una trayectoria de la base de este árbol (dibuja) hasta arriba. Siguiendo las distintas trayectorias podríamos resolver el problema.

S17: Pero... estás pensando que hay solo un tipo de plantas, pero no dice eso, podría haber distintos tipos de plantas que absorben distinta cantidad de pesticida.

S2 equipo 1: Pienso que podríamos hacer una tabla poniendo los datos en general que tenemos del problema y así podemos ir siguiendo lo que pasa con las plantas, con los herbívoros y con los carnívoros porque como que están concatenados

S3 equipo 1: Podríamos usar matrices que funcionan más o menos como las tablas...

S22: Podríamos pensar en una función en la que se considere la cantidad de pesticida que va quedando conforme pasa de las plantas a los herbívoros y a los carnívoros... pienso que más bien sería como una composición de funciones.

Ha sido interesante observar cómo estos comentarios surgen en distintas aplicaciones del problema y tratan de los elementos matemáticos que pueden ser empleados en su solución.

Después de este primer ciclo de modelación, al término de la primera discusión con el profesor y todo el grupo, quedaron únicamente dos opciones a seguir: el uso de tablas genéricas y el uso de funciones.

Tablas de datos. Ciclo 1 actividades basadas en la teoría APOE

El profesor decidió en ese momento proporcionar a los estudiantes la tabla 1 en la que la entrada i_j denota la cantidad de pesticida absorbida por las plantas para que la discutieran. Introdujo posteriormente una hoja de trabajo en actividades para apoyar a los estudiantes en su discusión. Los objetivos de la misma se muestran en el recuadro 1.

Tabla 1

	Planta 1	Planta 2	Planta 3	Planta 4
Pesticida 1	2	3	4	3
Pesticida 2	3	2	2	5
Pesticida	4	1	6	6

Recuadro 1

Hoja de trabajo 1- Objetivo:

Construcción de la matriz, la matriz A como función f_A y la multiplicación matriz-vector Av

Unidades en miligramos de pesticida i

Tabla 2

	Herbívoro 1	Herbívoro 2	Herbívoro 3
Planta 1	20	12	8
Planta 2	28	15	15
Planta 3	30	12	10
Planta 4	40	16	20

Recuadro 2

Hoja de trabajo 2- Objetivo:

Construcción del producto de matrices AB

Unidades en número de plantas tipo j que come el herbívoro j por mes

Tabla 3

	Carnívoro 1	Carnívoro 2
Herbívoro 1	4	1
Herbívoro 2	5	2
Herbívoro 3	1	1

Recuadro 3

Hoja de trabajo 3- Objetivo:

Construcción de la función f_{AB} y $f_A \circ f_B$, la matriz como función y la multiplicación matriz-vector y motivación para construir el producto ABC

Unidades en número de herbívoros tipo i que come el carnívoro j por mes

Trabajos con tablas. Ciclo de Modelación 2

Los estudiantes rápidamente identificaron los elementos en las tablas y utilizaron subíndices para identificarlos:

S11: Este 5 es el cuarto elemento en el segundo renglón de la tabla 1. Podemos escribirlo como $a_{24}=5$). Podemos hacerlo así con todos los elementos y tablas, así podemos ir resolviendo el problema.

Apoyados por las actividades todos los estudiantes reflexionaron sobre las matrices y la posibilidad de hacer operaciones con ellas, en términos de la teoría los estudiantes construyeron las matrices como Objeto mismo que podían desencapsular en los renglones y las columnas de la matriz que consideraron como vectores renglón y vectores columna en \mathbb{R}^n . Sin dificultad alguna los estudiantes realizaron Acciones sobre los vectores como objeto para encontrar las combinaciones lineales necesarias y para operar con el producto punto. Como resultado obtuvieron el vector que llamaron de “absorción de pesticida” usando el consumo de plantas por un organismo. Fueron capaces de considerar una matriz de consumo general.

S13: Si tenemos el consumo general de otro animal, a de la planta 1, b de la 2, c de la 3 y d de la 4 y tenemos la matriz de consumo que tiene que tener 4 tipos de plantas y 3 pesticidas el herbívoro va a consumir $a_{i1}a$ más $a_{i2}b$ más $a_{i3}c$ más $a_{i4}d \dots$

Esas respuestas mostraron evidencia de que los estudiantes interiorizaron el Proceso de obtener los vectores de absorción general y que al hacerlo construyeron el producto Av como proceso. Simultáneamente, con trabajo en las actividades que les permitieron reflexionar en dicho producto como una función fA

Figura 1

Respuesta del informante

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 1 \text{ libre}$$

S19: Lo que tenemos aquí es esta función. La podemos pensar como Ax es una función... una función de vectores.

S18: Sí fA es igual a A por x , es la regla de f . Para obtener un vector que muestre la cantidad de pesticida en un herbívoro que ha comido ciertas cantidades de plantas cada componente del vector resultante se encuentra haciendo el producto punto de cada vector renglón de la matriz por el vector de consumo. La mayoría de los alumnos logran hacer esta interiorización. Únicamente los estudiantes que mostraron una construcción muy débil del concepto de función no lograron comprender este argumento.

Producto de matrices ciclo 2.

El paso al producto de matrices se dio sin ninguna dificultad cuando los estudiantes enfrentaron una nueva matriz referente al consumo de plantas por algunos herbívoros en una hoja de trabajo. Utilizando el contexto del problema consideraron que

A9: Es como calcular el producto de una matriz por un vector, pero ahora, en cada caso el vector es una columna de la otra matriz, así sabemos que la cantidad del pesticida en la i -ésimo pesticida absorbido por el j -ésimo herbívoro usando el producto punto de un renglón de A por una columna de B y obtienes un número que es un elemento de una nueva matriz en la que tienes toda la información sobre la cantidad de pesticida absorbida por cada uno de los herbívoros.

La mayoría de los estudiantes comprendieron el producto de manera natural a la luz del problema de modelación. La mayoría mostró al menos una construcción Proceso del producto de matrices y les fue posible considerar este producto para encontrar el consumo de los animales carnívoros.

Figura 2

Respuesta del informante

En general,

$$AB = \begin{pmatrix} \text{reng}_1(A) \cdot \text{col}_1(B) & \text{reng}_1(A) \cdot \text{col}_2(B) & \dots & \text{reng}_1(A) \cdot \text{col}_j(B) \\ \text{reng}_2(A) \cdot \text{col}_1(B) & \text{reng}_2(A) \cdot \text{col}_2(B) & \dots & \text{reng}_2(A) \cdot \text{col}_j(B) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \text{reng}_i(A) \cdot \text{col}_1(B) & \text{reng}_i(A) \cdot \text{col}_2(B) & \dots & \text{reng}_i(A) \cdot \text{col}_j(B) \end{pmatrix}$$

Construcción del producto de matrices como una composición de funciones: Ciclo 3

Mediante trabajo sobre el contexto del problema en general ayudó a algunos estudiantes a interpretar y dar sentido al trabajo realizado hasta aquí en términos de funciones. Observamos que al final de la experiencia todos los estudiantes podían considerar el problema en términos de funciones matriciales, aunque la mayoría a un nivel Acción de construcción:

S23: ... estas x o v , los vectores están en \mathbb{R}^n que es el dominio de fA , entonces si los multiplicamos por la matriz A nos regresan vector b en \mathbb{R}^m , un vector en la imagen de la función fA . Puedo encontrar con un sistema de ecuaciones todas las x

Al final de la experiencia observamos que todos los estudiantes construyeron fA al menos como una Acción y alrededor de dos terceras parte la construyeron como un Proceso y al mismo tiempo construyeron su relación con los sistemas de ecuaciones. De igual manera más de la mitad de los estudiantes construyeron la multiplicación de matrices como una composición de funciones:

S13: ¿Cómo construimos fAB ? Tenemos A y B ...

S14: Con ellas podemos construir fA y fB ... y luego si calculamos AB y calculamos la f que le corresponde

Otros alumnos generalizaron sin necesidad de calcular Abx , estos alumnos notaron que la regla de correspondencia es la misma que para la composición de funciones así que $ABx = (AB)x = A(Bx) = fAB$. Sin embargo, al final del curso se hizo una pregunta sobre la relación del producto de matrices y la composición de funciones matriciales, el 75% de estudiantes mostraron la encapsulación del producto de matrices como Objeto, pero solamente unos 7 estudiantes mostraron haber construido la función composición de matrices como un Objeto.

CONCLUSIONES

Consideramos que el problema de modelación motiva a los estudiantes a reflexionar sobre la situación propuesta. Durante todo el proceso, el problema inicial apoyó, guio y dio sentido las estrategias de los estudiantes, mismas que fueron formalizadas a través del trabajo con el modelo y las actividades diseñadas con la teoría APOE. La referencia al problema también apoyó la construcción del significado de los nuevos conceptos introducidos. Las actividades les permitieron ligar el modelo con ideas abstractas. En conjunto permitieron un aprendizaje profundo del producto de matrices y de su consideración como funciones.

Las evidencias mostradas por los alumnos subrayan que el uso del modelo conjuntamente con las actividades les permite transitar del marco concreto del problema al contexto de los conceptos matemáticos mediante la activación de la reflexión. Los estudiantes construyeron los conceptos de interés a su propio paso.

La secuencia didáctica mostró ser efectiva para construir los conceptos de producto de matrices simultáneamente con la relación de las matrices con las funciones vectoriales.

Referencias

- Arnon, I., Dubinsky, E., Roa-Fuentes, S., Weller, K., Cottrill, J., Oktaç, A., et al. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307–334).
- Cook, J. P., Zazkis, D., & Estrup, A. (2018). Rationale for matrix multiplication in linear algebra textbooks. In S. Stewart, C. A. Andrews-Larsson, & A. Berman (Eds.). *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. ICME-13 Monographs* (pp. 103–125). Springer-Verlag.
- Czarnocha, B., Dubinsky, E. B., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (1999). One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. *Proceedings of the 23rd conference of the international group for the psychology of mathematics education 4*, 65–73. PME.
- González-Rojas, E., & Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: Construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las Ciencias*, 35, 89–107.
- Harel, G. (1987). Variations in linear algebra content presentations. *For the Learning of Mathematics*, 7, 29–32.
- Kolman, B., & Hill, D. (2013). *Álgebra lineal (8ª edición)*. Pearson, Educación.
- Ku, D., Trigueros, M., & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Educación Matemática*, 20, 65–89.
- Larson, C. (2010). *Conceptualizing matrix multiplication: A framework for student thinking, an historical analysis, and a modeling perspective* (Doctoral dissertation, Indiana University Bloomington). ProQuest Dissertations and Theses. <http://search.proquest.com/docview/748218708>
- Larson, C., & Zandieh, M. (2013). Three interpretations of the matrix equation $Ax=b$. *For the Learning of Mathematics*, 33(2), 11–17.
- Martin, M., Loch, S., Cooley, L., Decter, S., & Vidakovic, D. (2010). Integrating learning theories and applications-based modules in teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 432, 2089–2099.
- Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13, 473–485.
- Piaget, J. Y., & García, R. (1984). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia (2 da ed.)*. México: Siglo Veintiuno Editores.
- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Using models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 432, 2125–2140.

- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de la transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOS. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15, 199–232.
- Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras Mentales que Modelan el Aprendizaje de un Teorema del Álgebra Lineal: Un Estudio de Casos en el Contexto Universitario. *Formación Universitaria*, 10(4), 15–32. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062017000400003>.
- Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 100–120.
- Sandoval, I., & Possani, E. (2016). An analysis of different representations for vectors and planes in \mathbb{R}^3 : Learning challenges. *Educational Studies in Mathematics*, 92, 109–127.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on the Processes and Objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.
- Simon, M. S. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145.
- Trigueros, M., & Bianchini, L. B. (2016). *Learning linear transformations using models*. In Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM). Montpellier, France. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337884>
- Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, 438, 1779–1792.
- Vasco, D., Climent, N., Escudero-Avila, D., Montes, M., & Ribeiro, M. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *Bolema*, 30(54), 1–22. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11>.

LOS INDICADORES SOCIALES COMO INSUMO DE LA TRANSNUMERACIÓN EN LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA DE PROFESORES

Liliana Mabel Tauber - estadisticamatematicafhuc@gmail.com
Universidad Nacional del Litoral, Argentina.

Abstract:

Se analiza la formación estadística de docentes desde una perspectiva crítica centrada en el desarrollo de los procesos transnumerativos. El trabajo se enmarca en los elementos de alfabetización estadística y en el concepto de transnumeración —la capacidad de transformar datos en distintas representaciones y significados— como un tipo esencial de pensamiento estadístico para comprender fenómenos sociales complejos, como la medición de indicadores sociales. Se adopta un enfoque de investigación de diseño co-generativa (Greenwood & Levin, 2000), desarrollada en un programa de formación continua para profesores de matemática en ejercicio. La experiencia analizada incluyó sesiones colaborativas donde los profesores diseñaron tareas sobre indicadores sociales, interactuando con herramientas de inteligencia artificial (ChatGPT) para construir y analizar datos. A través de la aplicación del análisis de contenido aplicado a las propuestas didácticas elaboradas, se identificaron los elementos de alfabetización estadística y los procesos de transnumeración presentes en las mismas. Los resultados muestran que la transnumeración favorece el desarrollo del pensamiento crítico, permitiendo que los docentes comprendan y cuestionen los significados de los datos. La colaboración entre profesores e investigadores se evidencia como una vía eficaz para fortalecer la formación docente, promoviendo propuestas didácticas que integren la estadística con problemáticas sociales y contribuyan a una ciudadanía más reflexiva y democrática.

Estadística Cívica, Formación de profesores, Indicadores sociales, Transnumeración,
Alfabetización estadística crítica

INTRODUCCIÓN

En una sociedad donde los datos y la información cuantitativa influyen significativamente en la toma de decisiones personales, ciudadanas y profesionales, resulta fundamental brindar a los estudiantes oportunidades para examinar los datos insertos en esa información, de modo que puedan asumir un rol activo a partir de los mismos. Esto les permitiría “identificar e interrogar estructuras y discursos reforzados por argumentos basados en datos” (Weiland, 2017, p. 41).

En este contexto, la enseñanza de la estadística, debería habilitar la formación crítica de ciudadanos y de profesionales preocupados y ocupados en los problemas actuales de nuestra

sociedad. El mediador y colaborador de dicha formación debería ser el profesor, por lo que la formación estadística de los profesores debería ser un factor de relevancia.

En este sentido, en la investigación se encuentran distintas alternativas, algunas de ellas basadas en el estudio de clase para formar a los futuros profesores en la enseñanza del manejo de datos (Leavy, 2015), otros se apoyan en perspectivas prácticas basadas en la colaboración con investigadores para diseñar, implementar y analizar la instrucción estadística (Zapata-Cardona, 2020), otros recurren a la colaboración entre profesores (Souza et al., 2015; Cabrera et al., 2022) y otros, al acompañamiento de futuros profesores en el diseño de propuestas que respondan a las necesidades de los estudiantes (Tauber y Santellán, 2022).

Por otro lado, los aportes del estudio de las trayectorias previas de los profesores que hace Zapata-Cardona (2023), permite identificar cómo estas repercuten en la enseñanza de estadística que brindan a sus estudiantes. En un sentido similar, en Tauber (2022), Cabrera y Tauber (2022), Araneo (2024) y Cabrera et al. (2024), se describen creencias, imágenes, representaciones sociales y razonamientos de los profesores en relación con la estadística y a su enseñanza. Estos trabajos, aportan evidencias que permiten indicar que los profesores poseen escasa experiencia en torno a generar situaciones en las que el cuestionamiento frente a la información estadística (Gal, 2019) sea el eje de su enseñanza. Todo ello tiene consecuencias en las propuestas que realizan a sus estudiantes.

De esta manera, surge la inquietud por generar espacios de formación estadística para profesores en ejercicio, que permitan reflexionar sobre la importancia de construir el sentido estadístico, a través de propuestas que integren conceptos e ideas estadísticas fundamentales (Cabrera et al., 2024) y que estén ligadas al abordaje de problemáticas socio-políticas complejas que atañen a la vida de las personas. Así, tal como proponen Weiland (2017) y Gal et al. (2022), se podría poner en acción una estadística crítica que se interpele a sí misma, permitiendo identificar y cuestionar las estructuras sociales y los discursos que le dan forma, habilitando la formación de pensadores críticos para el desarrollo de sociedades más democráticas (Engel, 2019).

El escenario descrito nos lleva a reflexionar sobre las características de una propuesta didáctica de estadística dirigida a la formación continua de los profesores, en la que se propicie el pensamiento estadístico crítico. Así, planteamos las siguientes preguntas: ¿Qué elementos de la alfabetización y del pensamiento estadístico ponen en relación los profesores cuando diseñan una propuesta didáctica de estadística? ¿Los profesores consideran la complejidad conceptual que interviene en los procesos transnumerativos que se producen cuando se analizan datos asociados con indicadores sociales? ¿Qué procesos de transnumeración intervienen en las propuestas que diseñan los profesores?

MARCO REFERENCIAL

Tal como proponen Zapata-Cardona (2018) y Weiland (2017), la educación estadística tiene el desafío de promover el desarrollo de habilidades de pensamiento que permitan a los sujetos entender su entorno, participar críticamente en sociedad y aportar a un mundo mejor. Sin embargo, son pocas las propuestas en este campo, dirigidas a fortalecer la preparación de los docentes para tal fin (Pinto Sosa, 2022; Martínez Castro y Zapata-Cardona, 2022).

Hace tiempo que, desde la educación estadística, se reclama un cambio de enfoque basado en investigaciones estadísticas auténticas. Aún así, sigue predominando una estadística en abstracto, con datos descontextualizados, centrada en cálculo y en procedimientos (Pinto-Sosa, 2022; Zapata-Cardona, 2018). Más aún, es incipiente el desarrollo de propuestas de formación situada (Martínez Castro y Zapata-Cardona, 2022) y dirigidas a fortalecer la preparación de docentes en ejercicio; siendo que el desarrollo profesional docente es un proceso de transformación de la práctica educativa que ocurre en la formación docente continua con otros (Pinto-Sosa, 2022).

En tal sentido, la transnumeración (Pfannkuch y Wild, 2004) constituye un elemento relevante para el marco argumental de un pensador crítico, el cual cada vez más y de manera más evidente, se hace necesario en las democracias actuales en las que es necesario interpretar y comprender críticamente la información sobre la que se basan las decisiones públicas.

Cuando se parte de contextos socio-políticos complejos, como lo es la problemática de la medición de la pobreza o el estudio de desigualdades, la transnumeración es uno de los elementos esenciales implícito en los procesos de pensamiento estadístico (Tauber et al., 2022), que deberían ponerse en relación para posibilitar un escenario educativo en el que los estudiantes desarrollen habilidades tendientes a reconocer información relevante, identificar la intención y razonabilidad de los argumentos basados en datos y ser conscientes de cómo éstos afectan la objetividad de los juicios.

En torno a lo dicho, un posible escenario educativo, propuesto por Gal et al. (2022), es el contexto de la operacionalización de las variables e indicadores sociales en la problemática de la medición de la pobreza. Por su parte, Behar (2018) advierte que en la medición de constructos que no son observables directamente y que requieren de una elaboración conceptual, para medirlos es necesario un proceso de transnumeración que implica proponer o descubrir la forma de medida adecuada y los datos o variables que intervienen en la construcción del indicador bajo estudio.

En el marco propuesto por Pfannkuch y Wild (2004), se plantea que el pensamiento estadístico está integrado por cuatro dimensiones: un *ciclo investigativo* asociado con las etapas de un diseño estadístico de experimentos, una segunda dimensión que permite

reconocer los *tipos de pensamiento* necesarios para conectar el ciclo investigativo con la tercera dimensión, que es el *ciclo interrogativo*, el cual permite imaginar y buscar distintas alternativas, interpretar, criticar y juzgar las decisiones y conclusiones. Una última dimensión, está conformada por las *disposiciones* que habilitan la interpretación de significados más profundos a partir de la relación de las distintas dimensiones.

Así, dentro de esas dimensiones, la *transnumeración* surge como un tipo fundamental de pensamiento, ya que es necesario cada vez que se debe cambiar la representación de los datos para generar una comprensión más amplia de los fenómenos observados (Chick et al., 2005).

MARCO METODOLÓGICO

En respuesta a los desafíos planteados en las secciones anteriores, desde 2019, se han desarrollado distintas etapas de una investigación de diseño (Molina et al., 2011), algunas de las cuales han sido descritas en Tauber et al. (2019), Tauber (2021) y Tauber y Santellán (2022). En esos trabajos, se caracterizaron experiencias realizadas con estudiantes universitarios de Ciencias sociales, Ciencias naturales y Matemática, y se describieron las redes de elementos de la alfabetización estadística y de razonamientos estadísticos evidenciados por los estudiantes, mostrando que, aún los estudiantes sin formación previa, logran darle significado a los datos y a la información estadística cuando se les proponen actividades situadas en contextos reales.

Estos resultados nos llevaron a preguntarnos sobre lo que ocurre en ese sentido con los profesores. Por ello, esta investigación, se sitúa en un estudio llevado a cabo dentro de un programa de formación continua de profesores. Se usó investigación de diseño co-generativa (Greenwood & Levin, 2000), en la cual profesores e investigadores trabajan colaborativamente para resolver inquietudes y problemas que surgen de la práctica. Particularmente, se realiza un análisis de contenido (Cohen y Manion, 1990), basado en la identificación de elementos de alfabetización estadística (Gal, 2019), que intervienen en los procesos de transnumeración habilitados en una propuesta didáctica desarrollada por profesores de matemática, en el marco del programa mencionado.

Para la caracterización de los elementos de alfabetización estadística se utilizó el marco desarrollado por Gal (2019), en el que se diferencian elementos cognitivos y actitudinales y para los procesos de transnumeración, se consideraron las unidades de análisis, adaptadas de Chick (2005), quien indica que la transnumeración ocurre cuando:

- a. *se encuentran las medidas que capturan la cualidad o las características de la situación real.* Esto se observa cuando se modifican variables existentes o se crean nuevas variables. Por ejemplo, cuando a partir de variables pre-definidas se calcula un índice, como el caso de la Canasta Básica Alimentaria o la brecha de género.

- b. *los datos que han sido recolectados se transforman en múltiples representaciones.* Este proceso podrá observarse cuando se calculen medidas de resumen (frecuencias o distintas medidas descriptivas) y/o cuando se utilicen distintos tipos de representaciones tabulares y/o gráficas. En estos casos, en el análisis se tendrá en cuenta si las representaciones son utilizadas solo con un sentido estético o para lograr una mayor claridad y robustez en los argumentos.
- c. *el significado de los datos es comunicado en una forma que los demás puedan entender en términos de la situación real, aportando de este modo, a la objetividad de los juicios.* Este proceso podrá observarse a partir de las argumentaciones realizadas.

La propuesta analizada, fue diseñada por un grupo de tres profesores de matemática en ejercicio, dos de los cuales desarrollaban su labor en educación secundaria y el restante, en el nivel superior. Cabe aclarar que, en el programa participaron 12 profesores y en cada sesión se ponía a debate el trabajo de algunos de los grupos.

El trabajo aquí descrito se desarrolló en tres sesiones de dos horas cada una, en las que los profesores exponían sus avances y debatían con sus pares y con las investigadoras sobre los aspectos que podrían mejorarse o ampliarse. En las instancias de discusión, los profesores analizaban los aspectos de los procesos de transnumeración que podían surgir en cada propuesta.

La actividad que se les planteó a todos los grupos tuvo las siguientes directrices:

- Diseñar una tarea, propuesta o proyecto dirigido a tus estudiantes, en donde se integren conceptos e ideas estadísticas fundamentales derivadas del estudio de situaciones asociadas con la medición de la pobreza.
- Proponer posibles soluciones a partir de datos reales que permitan estudiar la problemática.
- Fundamentar las decisiones que tomaron para el diseño de las actividades propuestas.

El planteo de las posibles soluciones a las actividades que proponían los profesores, por un lado, permitía observar el grado de conocimiento estadístico que los profesores tenían y por otro, identificar desajustes en los procesos transnumerativos que, a-priori, pretendían fomentar en sus estudiantes.

DISCUSIÓN

En la Tabla 1, se presenta la primera versión de una tarea diseñada por un grupo de profesores (que llamamos Grupo 1). Tal como plantea Zapata-Cardona (2018), consideramos al aprendizaje como un proceso social que se da mediante la interacción de los actores y que,

además, los profesores son vistos como sujetos sociales que aprenden mediante la participación en una práctica común (Wenger, 2001), primero consideramos los aportes realizados por los demás profesores en torno a la propuesta realizada por el Grupo 1.

Tabla 1

Propuesta inicial presentada por el Grupo 1

Primera propuesta	Informe presentado por los profesores
Diseño de una tarea para estudiantes de 15 a 17 años	<p>A partir de datos recolectados, se realizó la Tabla A. A partir de la misma, realiza lo siguiente:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Un gráfico de barras. • Calcula la media aritmética y la moda • Interpreta ambas medidas.
Posibles soluciones	Los profesores no presentaron en su primer escrito posibles soluciones
Fundamentos sobre las decisiones tomadas	<p>Elegimos este tipo de actividades porque consideramos que cubre algunos de los contenidos que están indicados en el diseño curricular.</p> <p>Además, pensamos que son actividades sencillas para trabajar con alumnos de estas edades y no requiere de tanto tiempo, ya que es necesario cubrir otros contenidos de matemática.</p>

N° dormitorios	F i
1	224
2	254
3	99
4	2
5	1
	580

Fuente: Excel

Así, los interrogantes surgidos fueron: ¿Qué elementos de alfabetización estadística propician las actividades? ¿Qué contexto permiten explicar los datos? La propuesta, ¿favorece el pensamiento crítico y la autonomía? ¿Qué ideas estadísticas fundamentales intervienen en la resolución? ¿Cómo esperan que los estudiantes resuelvan las actividades planteadas? La propuesta, ¿habilita el uso de tecnología? ¿Cuál es el sentido de la interpretación solicitada en la tarea? Dicha interpretación, ¿habilita alguna acción crítica? ¿Habrá posibilidades de plantear tareas alternativas que amplíen la propuesta de manera de habilitar roles críticos o de decisión en los estudiantes?

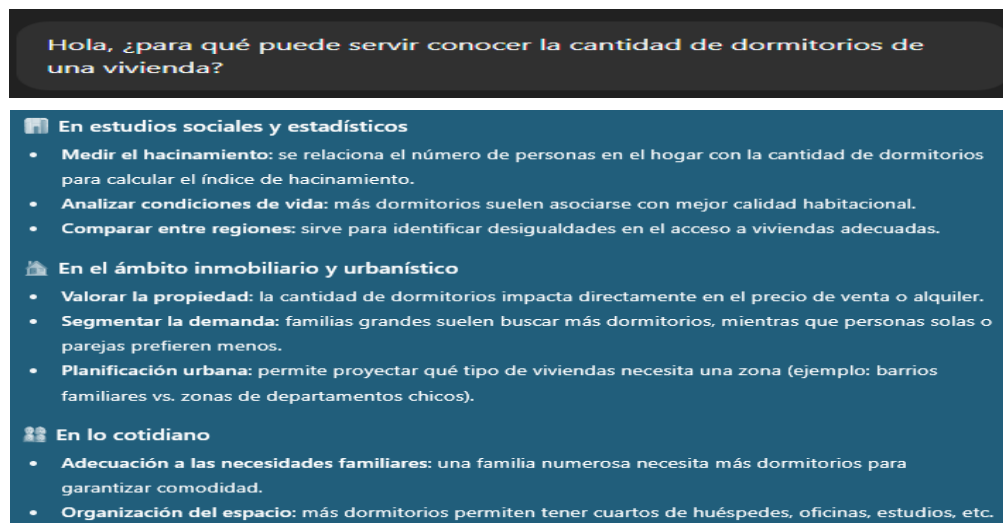
Estos y otros cuestionamientos habilitaron un proceso de revisión y de reflexión por parte de los profesores del Grupo 1, que los llevó a integrar diversos elementos de alfabetización estadística (Gal, 2019) a partir de una interacción con la Inteligencia Artificial (IA). Así, redefinieron su propuesta, poniendo en relación elementos como: alfabetización documental, conocimiento contextual, conocimiento estadístico y matemático y algunas habilidades

críticas (Figuras 1, 2 y 3). Cabe aclarar que, dos de los profesores interactuaban por primera vez con la IA.

Lo primero que se puede observar en la Figura 1, es que los profesores consideraron la variable que habían planteado en la propuesta inicial y se cuestionaron sobre la utilidad de la misma, lo cual los llevó a plantear la pregunta realizada a ChatGPT (OpenAI, 2023).

Figura 1

Diálogo inicial generado por el Grupo 1 con ChatGPT (recorte)



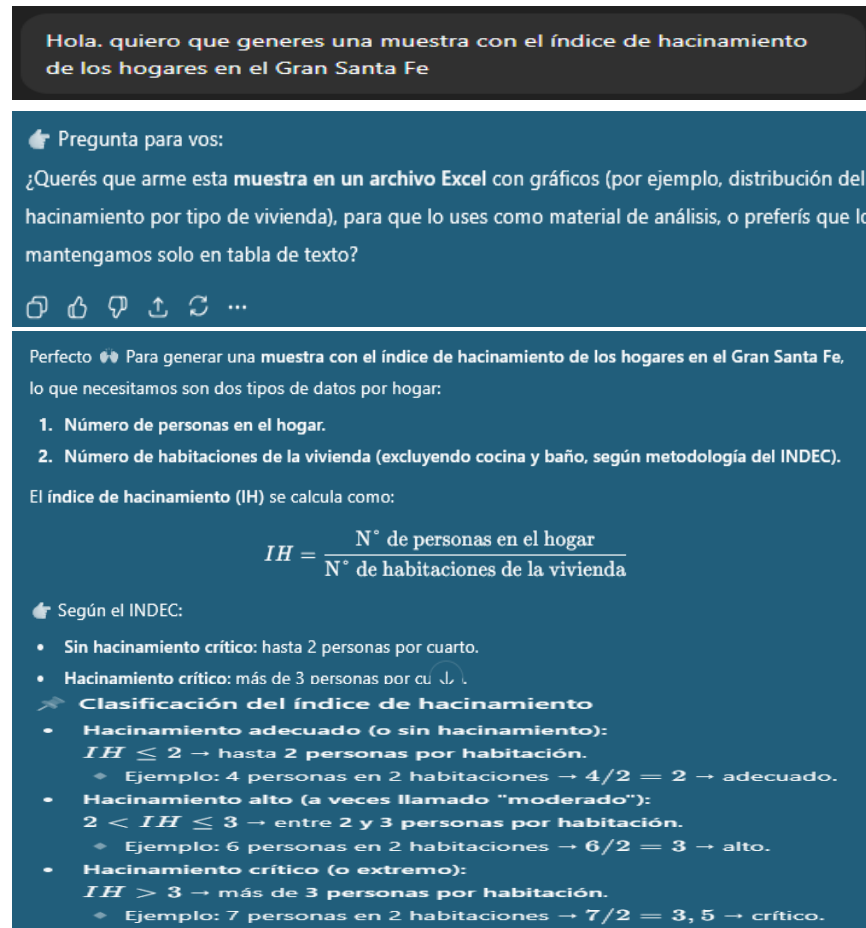
Esta primera interacción con la IA, habilitó un espacio en el que los profesores pudieron identificar los diversos contextos en los que podía aparecer la variable: “número de dormitorios por vivienda” y de esta manera, reconocer el lugar que ocupa la misma en el cálculo de índices sociales, tales como el Índice de Hacinamiento (IH). Esto tiene su correlato con lo que plantea Gal (2019), en el sentido de que, cuando se utilizan datos en contexto, éste debe representar “una verdadera necesidad de saber” y para ello, es esencial entender el lugar que ocupa una determinada variable dentro del contexto.

Por otra parte, a partir de la respuesta brindada por la IA, los profesores sintieron la necesidad de ampliar la información y para ello, indagaron en artículos periodísticos y en organismos que miden la pobreza. Así, detectaron que el IH se utiliza junto a otros, como el Índice de Desarrollo Humano o la línea de pobreza, para identificar hogares con necesidades básicas insatisfechas. Todo ello, favoreció un proceso de alfabetización documental, que les permitió adentrarse en las complejidades de la medición de los indicadores sociales (Engel, 2019). Esta indagación, les permitió entender los procesos metodológicos que intervienen en el cálculo del IH y, en consecuencia, interpretar la clasificación brindada por ChatGPT (Figura

2) e identificar la necesidad de disponer de una segunda variable asociada al IH: “número de personas por hogar”.

Figura 2

Continuación del diálogo generado por el Grupo 1 con ChatGPT (extracto)



Este proceso de interpretación y contextualización, generó la necesidad de disponer de datos para hacer una exploración de la variable considerada inicialmente y del IH asociado a la misma. En este sentido, tenían dos posibilidades: la primera, consistía en buscar datos en organismos como el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC) y la segunda, era simular datos con ayuda de la IA (Figura 2). Si bien los datos del INDEC, les aportaban una visión real de la situación, ya que el IH es una variable que se monitorea todos los años a través de la Encuesta permanente de hogares (EPH), los profesores declararon que los abrumaba la cantidad de información que contenía la base de datos y que por ello, preferían trabajar con una muestra “más manipulable”. Este hecho aporta una evidencia más a los

antecedentes que indican que los profesores sienten ansiedad ante el cúmulo de información estadística (Cabrera et al., 2024).

A partir de la muestra simulada por la IA, los profesores le solicitaron resúmenes que brindaran información sobre la distribución del IH según el tipo de vivienda (Casa o Departamento), a lo cual ChatGPT, les entregó los gráficos que se presentan en la Figura 3. En este punto, los profesores no estaban conformes con lo que brindaba la IA, porque querían representar las distribuciones de la variable cuantitativa “IH de cada hogar” y como se observa en la Figura 3, dos de las representaciones muestran las distribuciones de la variable IH categorizada (ver Figura 2) y el otro gráfico solo presenta las medias de los IH de cada grupo de viviendas (Casa – Departamento).

En este sentido, los profesores debatieron sobre la necesidad de disponer de resúmenes que les permitan distinguir si hay valores extremos y analizar la simetría y forma de las distribuciones, tanto del IH según tipo de vivienda, como del IH por hogar, del número de integrantes del hogar y del número de habitaciones por vivienda, de modo de argumentar sobre la confiabilidad de las medias representadas en el gráfico. Con dicho fin, luego de varios intentos de prompts que buscaban que la IA generara esos gráficos, decidieron construirlos usando Geogebra y CODAP (Tabla 2). Así, presentaron gráficos de caja, gráficos de puntos y distintas medidas estadísticas, lo cual les permitió hacer una comparación exhaustiva y fundamentada.

Figura 3

Gráficos generados por ChatGPT para la distribución del IH por tipo de vivienda

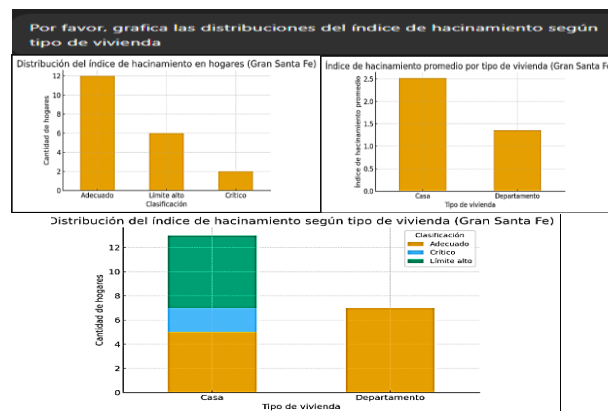


Tabla 2

Propuesta final presentada por el Grupo 1

Propuesta final Informe presentado por los profesores de actividades

Diseño de una tarea para estudiantes de 15 a 17 años

A partir de la base de datos y de los gráficos generados por ChatGPT, cuyas variables están descritas en el Anexo de la tarea, responder a las siguientes preguntas, indicando en qué información o resumen te basas. Si es necesario construir resúmenes complementarios, realízalos usando la base de datos.

¿Se encuentran valores atípicos en las distribuciones del IH según si se vive en casa o en departamento? ¿Los promedios representados en el segundo gráfico de barras simples son representativos de esas distribuciones? ¿Por qué? ¿Qué resúmenes alternativos podrían aportar información que valide las respuestas brindadas? Comparando esos resúmenes con los gráficos realizados por ChatGPT, ¿cuáles te aportan información más completa?

Si fueras el encargado de escribir un artículo para un medio digital y tuvieras que elegir solo dos resúmenes que fundamenten tu escrito, ¿cuál de ellos elegirías? Brinda fundamentos sobre tu elección.

Si fueras un asesor de la Secretaría de urbanismo, ¿para qué piensas que podrían servirte los datos analizados?

Posibles soluciones

Se presentan otros análisis realizados a partir de la base de datos simulada usando otras tecnologías (GeoGebra y CODAP): gráficos de puntos, de caja y medidas estadísticas, comparando las distribuciones para casas y departamentos. Además, explican cómo esos análisis permitirían comprender los datos a partir de los que se calcula el IH.

Fundamentos sobre las decisiones tomadas

Consideramos que, las actividades planteadas habilitan el uso de nuevos conocimientos e ideas estadísticas, ya que los estudiantes deberán analizar, por ejemplo, el gráfico de barras que presenta los promedios, y a partir del mismo, podrían analizar la completitud de la información que presenta el mismo. En ese sentido, se puede generar la necesidad de obtener distribuciones de variables cuantitativas que les permitirá identificar si hay valores atípicos, su significado, entender la simetría o asimetría de la distribución, lo que le permitirá identificar en qué tipo de vivienda se observa más hacinamiento, además de identificar las viviendas que tienen esa característica y, si cruzan la información con la cantidad de integrantes en la vivienda, podrían tener una visión más completa de la situación.

Luego de diversos acercamientos al conocimiento contextual, documental y estadístico (Gal, 2019), los profesores reeditaron su propuesta inicial, ampliándola y profundizando en

aspectos tanto conceptuales como críticos, con lo cual resultó la propuesta que se presenta en la Tabla 2.

Con base en las discusiones transcurridas en esta experiencia y con la producción lograda (Tabla 2), es posible concluir que este grupo, logró llevar adelante un proceso reflexivo sobre su propia propuesta. El mismo surgió de la discusión con los pares y de reconocer distintos aspectos implicados en una tarea estadística contextualizada y que genera pensamiento crítico.

Así, además de los elementos de la alfabetización estadística identificados antes, se ve que en la propuesta definitiva, los profesores lograron relacionar esos elementos en procesos transnumerativos (Chick, 2005). Así, cuando identifican la necesidad de introducir variables complementarias en el análisis, reconocer los alcances y limitaciones de una variable categorizada y de otra medida cuantitativamente, lograron capturar las características de la situación real, no sólo de la medición de un indicador sino también de la utilidad y complejidad de la medición.

Por otro lado, cuando los profesores buscan alternativas a las representaciones que entregaba la IA, y se cuestionan sobre la completitud de la información representada en los gráficos de la Figura 3, muestran evidencias de pensamiento crítico, ya que es posible identificar que tienen un objetivo que va más allá del sentido estético y que busca disponer de evidencia que aporte claridad y robustez a sus argumentos. Por último, algunas de las preguntas que plantean a sus estudiantes (Tabla 2), permite evidenciar que los profesores han logrado darle significado a los datos y en consecuencia, aportaron objetividad no sólo a los juicios que ellos lograron hacer, sino también a la propuesta propiamente dicha.

CONCLUSIONES

La transnumeración constituye un contenido relevante para el marco argumental de un pensador crítico. Así, cuando estos procesos transnumerativos se inmiscuyen en contextos socio-políticos complejos, posibilitan un escenario educativo en el que, tanto estudiantes como profesores, pueden desarrollar habilidades tendientes a formar conciencia sobre la objetividad de los juicios.

La medición de constructos que no son observables directamente, requiere de un proceso de transnumeración que el profesor debe conocer y vivenciar para darle significatividad a sus propuestas.

Por último, los resultados aportados en este trabajo, brindan una evidencia más de que la colaboración entre profesores e investigadores tiene implicaciones de relevancia para el desarrollo profesional de los profesores y que es importante seguir reflexionando y promoviendo el trabajo colaborativo tendiente a la mejora de las propuestas didácticas tendientes a formar ciudadanos críticos.

Referencias

- Araneo, J. (2024) *Concepciones de profesores de matemática sobre medidas estadísticas*. [Tesis de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática]. Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Avellaneda.
- Behar, R. (2018). Importancia del contexto en la formación del pensamiento y la cultura estadística. En I. Álvarez (Ed.), *Memorias del III Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 85-110). Asociación Colombiana de Educación Estocástica. http://acedest.org/2-encuentro/docs/Memorias_2ECEE.pdf
- Cabrera, C. y Tauber, L. (2022). Imágenes de los profesores respecto a la Educación Estadística. En: J. Sagula; D. Agudo (Eds.), *III Simposio de Educación Matemática-Virtual*. EdUnLu.
- Cabrera, G., Tauber, L., Gili, J. & Romero, D. (2022) La transnumeración como insumo del pensamiento crítico. In S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini, & A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering & Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the 11th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS11 2022)*. Rosario, Argentina. International Association for Statistical Education.
- Cabrera, G., Tauber, L. & Pochulu, M. (2024) Ideas Fundamentales para el ejercicio de una docencia estadística crítica en la Universidad. (pp. 115-136). En: P. Martins, S. Silva Santos y G. Carlos Barbosa (eds.): *Processos estatísticos, combinatórios e probabilísticos: discussões teóricas e práticas*. Metrics. <https://editorametrics.com.br/livro/processos-estatisticos-combinatorios-e-probabilisticos>
- Chick, H. L., Pfannkuch, M., y Watson, J. M. (2005). Transnumerative thinking: Finding and telling stories within data. *Curriculum Matters*, 1, 87–108.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla.
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Universidad de Granada. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/55028>
- Gal, I., Nicholson, J. & Ridgway, J. (2022). A Conceptual Framework for Civic Statistics and Its Educational Applications. In: Ridgway, J. (eds) *Statistics for Empowerment and Social Engagement*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20748-8_3
- Greenwood, D. J. & Levin, M. (2000) Reconstructing the relationships between universities and society through action research. In: Denzin, N. K.; Lincoln, Y. S. (ed.). *Handbook for Qualitative Research*. Sage, p. 85-106.
- Leavy, A. M. (2015) Looking at practice: revealing the knowledge demands of teaching data handling in the primary classroom. *Mathematics Education Research Journal*, v. 27, n. 3, p. 283-309.
- Martínez C. & Zapata-Cardona, L. (2022). Formación inicial de profesores de estadística en una perspectiva crítica. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 367-384). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule. https://portal.ucm.cl/content/uploads/2020/04/Formacion_del_profesorado_para_enseñar_estadística_retos_y_oportunidades.pdf

- Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-87.
- OpenAI. (2023). *ChatGPT (abril 25 versión) [Modelo de lenguaje]*. <https://chat.openai.com/>
- Pfannkuch, M. & Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En: D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17-45). Springer.
- Pinto-Sosa, J. (2022). Estadística con proyectos: una propuesta para la formación del profesorado. En A. Salcedo y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Formación del Profesorado para Enseñar Estadística: Retos y Oportunidades* (pp. 47-75). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule. https://portal.ucm.cl/content/uploads/2020/04/Formacion_del_profesorado_para_enseñar_estadística_retos_y_oportunidades.pdf
- Souza, L., Lopes, C., & Pfannkuch, M. (2015). Collaborative professional development for statistics teaching: a case study of two middle-school mathematics teachers. *Statistics Education Research Journal*, 14(1), 112-134.
- Tauber, L. M. (2021). Facetas de la Estadística Cívica Implícitas en una Experiencia de Enseñanza centrada en el Estudio de Indicadores Sociales. *PARADIGMA*, 41(e1), 89-117. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p89-117.id1019>
- Tauber, L. M., Redondo, Y., Santellán, S. & Cravero, M. (2022). Dimensiones del pensamiento estadístico asociadas a la exploración de índices sociales. Rosario: *11th International Conference on Teaching Statistics Proceedings*, 1-6. <https://doi.org/10.52041/iase.icots11.T3A2>
- Tauber, L., Redondo, Y. & Santellán, S. (2019). Construcción del sentido estadístico en estudiantes universitarios de ciencias naturales. En R. Flores; D. García; I. Pérez-Vera (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 200-209). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1153626/Tauber2019Construccion.pdf>
- Tauber, L. & Santellán, S. (2022) Propuesta evaluativa orientada a la formación del pensamiento estadístico en futuros profesores de matemática. En A. Salcedo y D. Levicoy (Eds.) *Formación del profesorado para enseñar estadística: retos y oportunidades*. (265-286). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística. Universidad Católica del Maule. https://portal.ucm.cl/content/uploads/2020/04/Formacion_del_profesorado_para_enseñar_estadística_retos_y_oportunidades.pdf
- Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 96, pp.33-47. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9764-5>
- Wenger, E. (2001) *Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad*. Paidós.
- Zapata-Cardona, L. (2018). Enseñanza de la estadística desde una perspectiva crítica. *Yupana*, (10) 30-31. <https://doi.org/10.14409/yu.v0i10>
- Zapata-Cardona, L. (2020) Colaboración entre profesores de estadística e investigadores: aportes al desarrollo profesional. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, v. 34, n. 68, p. 1285-1303. Doi: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a21>

INTEGRACIÓN DE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA Y DEL DISEÑO UNIVERSAL DEL APRENDIZAJE PARA ORGANIZAR LA REFLEXIÓN DEL PROFESORADO

Vicenç Font Moll - vfont@ub.edu
 Universitat de Barcelona, España.

Abstract:

En esta conferencia se presenta primero el llamado problema del diseño instruccional (qué criterios hay que suministrar al profesorado para que estos diseñen, implementen y rediseñen secuencias de tareas cada vez mejores) así como diferentes soluciones a dicho problema. Después, dada la creciente relevancia de los temas de inclusión educativa a nivel internacional y que los currículos educativos han incorporado la necesidad de atender la diversidad del alumnado en el aula, se presenta, como una de las posibles soluciones al problema del diseño instruccional, una propuesta de integración de la pauta del Diseño Universal para el Aprendizaje y la de los Criterios de Idoneidad Didáctica para ser usada como herramienta para organizar la reflexión del profesorado. Para ello, primero, se realizó un análisis documental de la literatura sobre el DUA; segundo, se contrastó la pauta del DUA con la de los CID, relacionando los principios y puntos de verificación del DUA con los componentes e indicadores de los CID para diseñar una primera propuesta integradora entre ambos referentes; y tercero, se realizó una validación de expertos con investigadores conocedores de los CID para ajustar la pauta originalmente propuesta. Por último, se comenta la implementación de esta pauta en un curso de formación de futuros profesores de secundaria de matemáticas.

Criterios de idoneidad didáctica, diseño universal para el aprendizaje, reflexión docente, educación matemática

PROBLEMAS RELACIONADOS CON LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

La formación matemática y didáctica de los docentes es un campo de investigación que requiere cada vez más atención tanto por parte de la comunidad internacional de investigadores en Educación Matemática (EM) como de las autoridades educativas de todo el mundo. Entre otras razones porque se considera que la calidad de la enseñanza de esta materia está muy relacionada con la formación del profesorado que la imparte. En esta conferencia me limitaré a señalar algunos de los problemas relacionados con la formación de profesorado de matemáticas. Entre otros, los siguientes:

1) El problema de la falta de conocimientos matemáticos del profesorado. Uno de los problemas importantes es que muchos de los profesores de matemáticas no tienen la

formación matemática adecuada para impartir esta materia. Históricamente este problema se presentaba en la formación de maestros y no tanto en la formación del profesorado de secundaria, pero últimamente, en algunos países, también se da en la formación del profesorado de secundaria.

2) El problema de la confusión generada en el profesorado por los documentos curriculares. Se observa en muchos países que el profesorado tiene dificultades para entender y aplicar las orientaciones de los documentos curriculares, lo cual puede estar relacionado con que algunos de los constructos contemplados en estos currículos no son lo suficientemente claros (por ejemplo, el constructo competencia) y, también, por la manera en que se elaboran estos documentos

3) Determinar cuáles son los conocimientos y competencias que necesita el profesor de matemáticas. En el diseño de los programas de formación del profesorado de Matemáticas, parece necesario utilizar un modelo de categorías de conocimientos y competencias que se consideran útiles para el desarrollo de la actividad profesional. Esta es la razón por la que, en la literatura sobre investigación sobre la formación del profesorado, encontramos diferentes propuestas de tales sistemas de categorías. Seguramente el problema de determinar qué conocimientos y competencias necesita el profesorado de matemáticas para enseñar esta materia sea el gran problema de la formación de este profesorado.

4) El cuarto problema, muy relacionado con el anterior, pero más acotado, es el llamado problema del diseño instruccional: qué criterios hay que suministrar al profesorado para que estos diseñen, implementen y rediseñen secuencias de tareas cada vez mejores.

EL PROBLEMA DEL DISEÑO INSTRUCCIONAL

Este cuarto problema es el que voy a tratar en esta conferencia. Este problema que lo podemos formular como: ¿Qué criterios hay que suministrar al profesorado para que estos diseñen, implementen y rediseñen secuencias de tareas cada vez mejores? Esta muy relacionado con otros problemas, aunque no son el mismo problema: 1) ¿Con qué criterios valorar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas? 2) ¿Cuál es el papel de la teoría (en particular la generada por el área de EM) en la generación de estos criterios? A continuación, comentaremos tres posibles respuestas al problema del diseño instruccional:

1) Una primera respuesta a este problema sería la que aquí llamaremos positivista (objetivista, cientifista, etc.), que se podría formular de la siguiente manera: la investigación científica realizada en el área de la EM nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para obtener los efectos considerados como objetivos a conseguir. Se trata de utilizar la investigación empírica para informar y mejorar las prácticas pedagógicas en el aula. Este enfoque reconoce la importancia de aplicar métodos científicos para evaluar la efectividad

de diferentes estrategias de enseñanza y aprendizaje. Se trata de ofrecer al profesor prácticas <<que funcionan>> basadas en evidencias científicas.

Esta respuesta presenta el problema de que da por supuesto que está muy claro lo que es una evidencia científica en el área de EM, y el problema no está en la noción de evidencia, está en la noción de <<científica>>. Por tanto, es razonable preguntarnos qué es una evidencia científica en EM. En una escala de menos a más científica tenemos: Tipos de evidencias científicas: a) Informes de expertos; b) Estudios de casos; c) Estudios Experimentales Controlados: Estos estudios implican la asignación aleatoria de participantes a un grupo experimental que recibe una intervención y a un grupo de control que no la recibe. Por ejemplo, un estudio experimental podría evaluar el impacto de una determinada estrategia de instrucción en el rendimiento de los estudiantes en matemáticas. d) Meta-Análisis: Los meta-análisis son estudios que combinan los resultados de múltiples investigaciones sobre un tema específico para obtener una visión general de las conclusiones; e) Meta-Análisis de Meta-Análisis.

Esta perspectiva considera que la investigación realizada en el área de la EM y áreas afines nos dirá cuáles son los criterios que hay que tener en cuenta (causas) para obtener los efectos considerados como objetivos a conseguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje (aprendizaje eficaz). Dicho de otra manera, la investigación científica basada en evidencias ofrecerá a los profesores <<prácticas que funcionan>> ya que están avaladas por investigaciones realizadas, por ejemplo, con un grupo experimental y un grupo control, por meta-investigaciones sobre muchas de estas investigaciones y por meta investigaciones realizadas sobre éstas meta investigaciones.

Desde este punto de vista, la estrategia para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas deben ser de tipo arriba/abajo, por ejemplo, a partir de la producción de materiales curriculares realizados por expertos que aplican conocimiento científico y que permiten realizar prácticas que sabemos que funcionan porque están basadas en evidencias (o bien elaborados por los mismos profesores siguiendo estas prácticas que <<funcionan>>).

2) La respuesta de la administración: El profesorado tiene obligaciones que cumplir. Desde la perspectiva de la administración educativa, no importa como una determinada orientación, criterio o práctica ha llegado al currículo, lo que importa es que una vez está en el currículo se convierte en una obligación para el profesorado.

Estas dos respuestas sitúan al profesor en un ejecutor con poco margen de maniobra, como alguien que aplica prácticas que funcionan (ya que tenemos evidencias científicas) o bien cumple obligaciones curriculares.

3) Tercera respuesta: desarrollar la reflexión del profesorado a partir de criterios consensuales. Una tercera respuesta al problema instruccional, que es intermedia entre las

dos anteriores es la que considera que la solución pasa, en parte, por desarrollar la reflexión del profesor sobre criterios ampliamente consensuados y la autonomía del profesorado en su aplicación.

En esta última línea de respuestas al problema instruccional, que es intermedia entre las dos primeras, es la que considera que los criterios que deben guiar la reflexión y la autonomía del profesorado deben ser de tipo consensual. Se trata de consensuar criterios para orientar la práctica (que se consideran de calidad) útiles en dos momentos de los procesos de instrucción matemáticos. A priori, los criterios consensuados son principios que orienten "como se tienen que hacer las cosas". A posteriori, estos criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado. Esta tercera respuesta si bien tiene en cuenta la investigación científica y las obligaciones del profesor no se limita a su aplicación mecánica ya que empodera al profesorado para que en función del contexto y de su criterio de más o menos peso a un criterio o a otro.

El hecho de presentar las tres respuestas seguidas y separadas puede dar la sensación de que hay que optar por una de las tres, pero es mejor pensar en que las tres respuestas aparecen entremezcladas.

Algunos aspectos marginales del punto de vista positivista son asumibles por el punto de vista consensual, por ejemplo: a) Las prácticas que funcionan (con evidencia científica) se presentan al profesor como orientaciones a seguir (lo que se debe de hacer); b) Se reconoce un cierto papel al contexto donde el profesor debe aplicar estas prácticas y se le reconoce una cierta capacidad de decisión; c) Algunas de estas prácticas que funcionan (hay evidencia científica) fácilmente pueden llegar a conseguir un amplio consenso en toda la comunidad educativa (por ejemplo, proponer que el profesor realice una evaluación formativa o que tenga en cuenta los conocimientos previos).

Estructura de un ciclo formativo para explicar la solución entremezclada de las tres respuestas al problema del diseño instruccional

La figura 1 explica con más detalle porque hay que pensar en una mezcla de las tres respuestas al problema del diseño instruccional y no en tres respuestas separadas y diferentes. Para entenderla, explicaré la estructura de un ciclo formativo que hemos implementado en diferentes programas de formación. Para ello, supongamos que en lugar de una conferencia estuviésemos en un taller en el que (a) se propone a los participantes la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis individual y grupal a partir de sus conocimientos previos y sin darles ninguna pauta. La puesta en común, plausiblemente, permite observar algunas regularidades, entre otras las siguientes: 1) se expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración; 2) las opiniones se pueden considerar evidencias de diferentes tipos de conocimientos; 3) Cuando

las opiniones tienen un componente valorativo importante, se pueden inferir criterios que, en su opinión, deben guiar la práctica del profesor.

b) El siguiente paso consiste en determinar si son valores individuales o más bien son morales, en el sentido de que son valores que la comunidad interesada en la EM está transmitiendo a sus miembros (por ejemplo, a los futuros profesores). A partir de esta pregunta se llega a la conclusión de que, sobre todo, son criterios que gozan de un cierto consenso en la comunidad y que los participantes concuerdan con este consenso por su propia experiencia y formación o bien lo asumen sin casi discusión. En este caso, se habría comprobado el siguiente fenómeno: (1) El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (criterios que orientan la práctica); (2) Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad de educación matemática); (3) Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (por tanto, tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la EM, las cuales están muy presentes en todos los ámbitos de formación del profesorado (nivel de difusión 2).

c) A continuación. Se dedicaría tiempo a explicitar dichas tendencias (Tendencia a incorporar nuevos tipos de contenidos matemáticos; Tendencia a la presentación de matemáticas contextualizadas; Tendencia de tipo metodológico hacia una enseñanza-aprendizaje activa (constructivista); Tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs); Tendencia a dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos; Tendencia a considerar que Saber Matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos; Tendencia a aceptar el principio de Equidad en la Educación Matemática Obligatoria; tendencia a presentar una enseñanza globalizada y/o interdisciplinaria; etc.).

d) El siguiente paso es preguntarse de dónde salen estas tendencias y la respuesta es que aparecen a partir de resultados obtenidos en el área de la EM (y en otras áreas); y que han conseguido un cierto consenso. Se podrían ejemplos de resultados hipotéticos que no obtendrían consenso (más bien rechazo) y otros que si lo conseguirían (nivel de difusión 1). También comentaríamos que normalmente los resultados científicos son historias pasadas (por ejemplo, se ha realizado una investigación que ha incorporado la modelización y se ha evidenciado como resultado una mayor competencia matemática de los participantes), pero cuando se convierten en tendencias, son historias futuras, ya que es lo que se le dice al profesorado que debe hacer en el futuro.

Figura 1

Tres propuestas entremezcladas al problema del diseño instruccional



Hay resultados que se discuten, hay resultados que se ignoran, hay resultados que van generando un cierto acuerdo

e) A continuación se haría un análisis de contenido de los documentos curriculares para observar que algunas de las tendencias comentadas en el punto c se han incorporado en el currículum, lo cual las hace más sostenibles al convertirse en casi obligaciones que tiene el profesorado. Se pondría énfasis en que si bien la incorporación de las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas las hace más sostenibles (nivel de sostenibilidad 1), realmente no son sostenibles hasta que el profesorado las incorpora en sus creencias, conocimientos, valores, etc. (nivel de sostenibilidad 2)

f) Una vez observado el fenómeno anterior (punto b) en el cual se evidencia una relación entre los criterios que orientan la práctica del profesor (cuando ésta se orienta a la mejora) y los resultados y constructos teóricos de la EM, resulta pertinente preguntarse ¿cuál es (o debe ser) el papel de la EM en la generación de criterios que orienten la práctica del profesor? Se explicaría que la respuesta a esta pregunta depende de cuáles consideremos que son las demandas a las que tiene que dar respuesta la EM. Dicho de otra manera, tenemos que posicionarnos sobre si la EM tiene que dar respuesta a las dos demandas siguientes y en cómo debe hacerlo: Demanda 1: Comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina (“¿qué ha ocurrido aquí cómo y por qué?”); Demanda 2: Orientar cómo deben ser los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina y, en particular, cómo mejorarlos (“¿qué se debe de hacer?”, “¿qué se podría mejorar?”). La primera lleva a describir, interpretar y/o explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina (ciencia básica / teoría). La segunda lleva a generar criterios para orientar cómo deben ser los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y cómo orientar su mejora (ciencia aplicada). Se trata de demandas diferentes pero relacionadas ya que, sin una comprensión de

los procesos de enseñanza-aprendizaje de una disciplina no es posible conseguir su mejora. También comentaríamos los diversos posicionamientos de los diferentes programas de investigación en EM sobre estas dos demandas.

g) A continuación, la problemática sobre cuál es (o debe ser) el papel de la EM en la generación de criterios que orienten la práctica del profesor se relaciona con lo que llamamos el problema del diseño instruccional y que formulamos de la siguiente manera: ¿Qué criterios usar para diseñar y rediseñar una unidad didáctica para que sea cada vez mejor? ¿Cómo debe ser una (buena) clase (secuencia de clases) de matemáticas? ¿Cuál es el papel de la EM en la generación de estos criterios? Se trata de preguntas relacionadas con cómo determinar la calidad de un proceso de instrucción. A continuación, comentaríamos las tres soluciones explicadas anteriormente (objetivista, la de la administración y la consensual) y nos centraríamos en la solución consensual.

Esta solución, si bien considera importante tener en cuenta a la comunidad científica del área de la EM, no cree que sea la única a tener en cuenta, ya que considera que lo que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad educativa (comunidad científica, profesores, administración, padres de familia, etc.) cuando ésta busca conseguir un consenso sobre “lo que se puede considerar como mejor”. Desde esta perspectiva hay que consensuar principios que pueden servir primero para guiar los procesos de instrucción de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones.

h) De acuerdo con la perspectiva consensual, se propondría a los participantes en el taller establecer un consenso local (en el grupo) sobre los criterios a tener en cuenta para considerar un proceso de enseñanza y aprendizaje como bueno, de calidad, idóneo, mejor, etc. Por ejemplo, en un grupo en el que se siguieron todos estos pasos se acordó que el profesor después de implementar la clase se debía de hacer las siguientes preguntas: 1) ¿He enseñado unas matemáticas de calidad? 2) ¿Han aprendido los alumnos con las tareas propuestas? 3) ¿Los contenidos se corresponden con el currículo y son útiles para su inserción sociolaboral? 4) ¿Las tareas y su gestión promueven la implicación de los alumnos? 5) ¿He utilizado los recursos temporales y materiales, etc. adecuados? 6) ¿He realizado una gestión adecuada de la interacción que ha permitido resolver las dificultades de los alumnos?

i) El siguiente paso es comentar que, desde la EM, diferentes autores han realizados intentos para recopilar criterios para orientar la práctica del profesor para que ésta sea de calidad, óptima, etc. (Praetorius y Charalambous, 2018). Se trata de una recopilación de criterios que gozan de un amplio consenso en la EM. Uno de estos enfoques que ha trabajado en esta línea es el Enfoque Ontosemiótico desarrollando la noción de idoneidad didáctica (Breda et al, 2018a; Godino et al., 2023).

g) En el siguiente paso se explicaría la noción de idoneidad didáctica y los criterios de idoneidad didáctica (CID) (figura 4). Se trata de un constructo multidimensional que se descompone en seis criterios parciales (Breda, 2020; Breda, Pino-Fan y Font, 2017): 1) criterio de idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”; 2) criterio de idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; 3) criterio de idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) criterio de idoneidad de medios, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5) criterio de idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; y, 6) criterio de idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, entre otros.

A continuación, se harían operativos los CID mediante su desglose en componentes e indicadores. Mediante diferentes tareas el grupo va acordando diferentes componentes e indicadores de los criterios, los cuales encajan fácilmente con los propuestos en Breda et al. (2017). Se trata de generar una rúbrica (con criterios, componentes e indicadores) para ayudar a los profesores en la valoración de su práctica y guiar su rediseño, pero que es muy diferente a las guías docentes cuyo propósito es ayudar a los maestros a dar forma a la instrucción y guiar su acción y toma de decisiones, en particular es muy diferente a las guías docentes para el profesor que acompañan a los libros de texto. De esta manera, cada CID se va desglosando en componentes e indicadores. En Breda et al. (2017) se presenta una rúbrica con indicadores para cada componente.

A continuación, se reflexionaría sobre los criterios acordados por los participantes y su relación con los CID. El hecho de que los participantes han usado implícitamente los CID antes de conocerlos permite refinar el fenómeno observado en b de la siguiente manera: 1) El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (criterios que orientan la práctica); 2) Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad matemática); 3) Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (por tanto, tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la EM).

El motivo por el cual los criterios de idoneidad didáctica se infieren en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que justificar que sus propuestas representaban una mejora,

sin haberseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión, se puede explicar (Breda et al., 2018b) por los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de la EM, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores se puedan inferir en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable.

Se terminaría este paso resaltando que: 1) el constructo CID pretende ofrecer al profesor una pauta para orientar el diseño y rediseño de su práctica docente, 2) ellos lo pueden usar como pauta para organizar su práctica, 3) los criterios de idoneidad se consideran como normas que son principios, en lugar de normas que son reglas. Se pondría el énfasis en este tercer aspecto, es decir, los criterios de idoneidad si bien son normas, no son reglas que operan de la manera todo o nada (se aplican o no se aplican, se siguen o no se siguen). De esta manera, la idoneidad se puede entender como la calidad relativizada y condicionada por el contexto y el juicio del profesor.

LOS VALORES Y PRINCIPIOS EN LA REFLEXIÓN DEL PROFESORADO

Las tendencias actuales, tanto en educación inicial como continua de profesores, destacan la importancia de profundizar en la reflexión docente sobre la práctica y en la argumentación subyacente como aspectos claves para el desarrollo profesional docente (Sol et al. 2025). Con el propósito de guiar la práctica docente y su reflexión para que sean de calidad, algunos autores han compilado diferentes criterios basados en los hallazgos de la investigación en didáctica de la matemática (por ejemplo, Hill et al., 2008; Praetorius y Charalambous, 2018; Prediger et al., 2022, Godino et al., 2023). En particular, el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2017; Breda et al., 2018a; Breda et al., 2018b) es un ejemplo de compilación de este tipo de criterios.

La reflexión del profesorado sobre su práctica organizada a partir de los CID, enfoca al profesorado a reflexionar sobre el criterio ecológico, en particular sobre los principios y valores que un país ha decidido enseñar a sus futuros ciudadanos y cómo tenerlos en cuenta en los procesos de instrucción matemática. En muchos países se han incorporado en los currículos valores y principios que se consideran positivos: por ejemplo, los objetivos de desarrollo sostenible, la perspectiva de género, la educación para la paz, el principio de

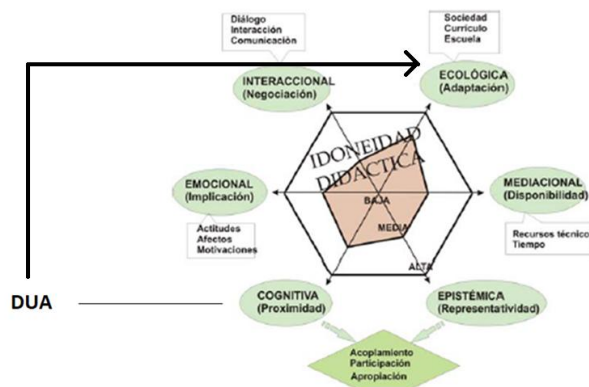
Con relación al DUA conviene separar lo que es una evidencia científica y lo que se puede considerar un principio o valor ideológico. Las personas somos diferentes en la manera en que gestionamos, contextualizamos y expresamos (evidencia científica) y, por eso, necesitamos multiplicidad de opciones porque todo el mundo pueda encontrar su vía de aprendizaje (principio).

Este gran principio del DUA se concreta en los llamados principios clave: 1) Representación: Proporcionar información de varias maneras porque todos los estudiantes puedan acceder a ella. Esto puede incluir texto, imágenes, audio, video, gráficos, entre otros; 2) Acción y expresión: Ofrecer a los estudiantes diversas formas de demostrar aquello que han aprendido. Algunos estudiantes pueden expresar mejor a través de la escritura, mientras que otros pueden preferir presentaciones orales, proyectos visuales, dramatizaciones, entre otras formas; 3) Participación y compromiso: Proporcionar oportunidades diversas porque los estudiantes se involucren y participen activamente en el proceso de aprendizaje. Esto puede implicar actividades colaborativas, debates, juegos de rol, entre otros.

La investigación que da soporte al DUA se puede dividir en cuatro categorías: 1) La investigación fundacional sobre el DUA (evidencia científica); 2) La investigación que parte de asumir el principio general del DUA de que el Sistema Educativo permita multiplicidad de opciones de manera que todo el mundo pueda encontrar su vía de aprendizaje, la cual, a su vez, se puede dividir en: a) la investigación sobre los principios, pautas, puntos de verificación, etc. del DUA; La investigación sobre prácticas prometedoras que permiten aplicar el DUA; La investigación sobre la implementación del DUA en diferentes contextos.

Figura 3

DUA y Criterios de Idoneidad Didáctica



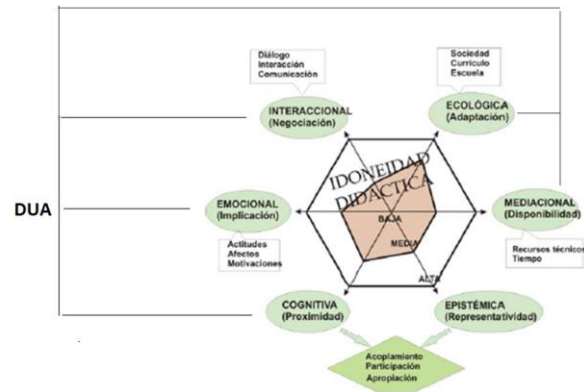
Como todos los planteamientos basados en principios, en el DUA se hace un desglose en subprincipios, pautas y puntos de verificación para obtener una pauta que sea operativa. Por ejemplo, la figura 4. Dicho desglose, si lo comparamos con los CID (figura 5), vemos que se solapan con componentes e indicadores de todos los criterios si exceptuamos el criterio de

idoneidad epistémico, lo cual es comprensible si se piensa que el DUA está pensado para cualquier materia

Figura 4 y 5.

Ejemplo de pautas y puntos de verificación y su relación con los CID

Pautas	Puntos de verificación
Principio I: Proporcionar múltiples medios de representación (el qué del aprendizaje)	
Pauta 1: Proporcionar diferentes opciones para la percepción	1.1. Ofrecer opciones que permitan la personalización en la presentación de la información 1.2. Ofrecer alternativas para la información auditiva 1.3. Ofrecer alternativas para la información visual
Pauta 2: Proporcionar múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y los símbolos	2.1. Clarificar el vocabulario y los símbolos 2.2. Clarificar la sintaxis y la estructura 2.3. Facilitar la decodificación de textos, notaciones matemáticas y símbolos 2.4. Promover la comprensión entre diferentes idiomas 2.5. Ilustrar a través de múltiples medios



Este solapamiento permite la integración del DUA con los CID para generar una pauta que sirva para organizar la reflexión del profesorado de matemáticas cuando esta se orienta a la mejora (Sánchez et al. 2025). Para ello, primero, se realizó un análisis documental de la literatura sobre el DUA; segundo, se contrastó la pauta del DUA con la de los CID, relacionando los principios y puntos de verificación del DUA con los componentes e indicadores de los CID para diseñar una primera propuesta integradora entre ambos referentes; y tercero, se realizó una validación de expertos con investigadores concedores de los CID para ajustar la pauta originalmente propuesta. En las figuras que siguen se presenta esta pauta integrada de texto que se enseñó a los futuros profesores de matemáticas de secundaria en España en el curso 2024-2025 como herramienta para organizar su reflexión sobre la práctica. Lo que no está en negrita es de la pauta de los CID enseñada en cursos anteriores y lo que está en negrita son cambios debidos a la integración del DUA:

Tabla 1. Componentes e indicadores del criterio cognitivo integrando el DUA.

Componentes	Indicadores
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad de la complejidad de la noción a enseñar	Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno (o varios significados parciales), se propone una muestra representativa de problemas. Para uno (o varios significados parciales), se hace uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y de tratamientos y conversiones entre los mismos.

Tabla 2. Componentes e indicadores del criterio cognitivo integrando el DUA

Componentes	Indicadores
Conocimientos previos	<ul style="list-style-type: none"> – Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) y estos conocimientos previos son activados cuando son necesarios. – Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad razonable) en sus diversos componentes.
Consideración de las diferencias individuales 1	<ul style="list-style-type: none"> – Se proporcionan soportes para los estudiantes que los necesiten y un mayor grado de libertad para los estudiantes que puedan hacer la tarea de manera independiente (por ejemplo, plantear retos que permitan diferentes niveles de éxito; proporcionar actividades de ampliación y de refuerzo, y más o menos guiadas; usar mapas conceptuales; proporcionar plantillas para tomar apuntes). 2 – Impulsar la colaboración y la comunicación mediante grupos heterogéneos.
Aprendizaje	<ul style="list-style-type: none"> – Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos/competencias pretendidas o implementadas (evidencias de aprendizaje). – Se consideran diferentes tipos de evaluación de los aprendizajes (inicial, formativa, formadora, y sumativa). – Se proporcionan instrumentos a los estudiantes para autoevaluarse. – Se facilitan diferentes modos de expresión para evidenciar sus aprendizajes.
Alta demanda cognitiva para favorecer una comprensión significativa	<ul style="list-style-type: none"> – Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.). – Se promueven procesos metacognitivos que facilitan la autorregulación.

Tabla 3. Componentes e indicadores del criterio interaccional integrando el DUA

Componentes	Indicadores
Interacción docente-discente	<ul style="list-style-type: none"> – El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.). – Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los estudiantes (se interpretan correctamente los silencios de los estudiantes, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego adecuado de preguntas y respuestas, etc.). – Se busca llegar a consensos con base en el mejor argumento. – Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los estudiantes. – Se facilita la inclusión de los estudiantes en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre discentes	<ul style="list-style-type: none"> – Se favorece el diálogo y la comunicación entre los estudiantes (por ejemplo, tutoría entre iguales). – Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión. – En el trabajo en grupo, se establecen claramente los objetivos, roles, responsabilidades, y normas.
Autonomía	<ul style="list-style-type: none"> – Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación, y validación). – Se ofrece un apoyo gradual que permita avanzar a cada estudiante en el desarrollo de sus competencias, definir objetivos, y desarrollar estrategias para conseguirlos.
Evaluación formativa	<ul style="list-style-type: none"> – Observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes. – Se ofrece regularmente una retroalimentación del progreso que sea informativa, accesible, y explícita para los estudiantes, destacando el esfuerzo y la perseverancia.

Tabla 4. Componentes e indicadores del criterio mediacional integrando el DUA.

Componentes	Indicadores
Recursos materiales (manipulativos, calculado-ras, ordenadores, textos y hojas de trabajo)	<ul style="list-style-type: none"> – Uso de materiales manipulativos e informáticos que permitan introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, y argumentos adaptados al significado pretendido. – Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones. – Los materiales son accesibles (uso de colores y fuentes recomendadas, asistentes para la creación de tablas de contenidos que permitan una navegabilidad práctica y la descripción de imágenes, traductores automáticos, etc.). – Se usan diferentes canales de información.
Número de estudiantes, horario y condiciones del aula	<ul style="list-style-type: none"> – El número y la distribución de los estudiantes permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. – El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones en la última hora). – El aula y la distribución de los estudiantes es adecuada para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje pretendido.

Tiempo (de la enseñanza colectiva/tutorización, tiempo de aprendizaje)	<ul style="list-style-type: none"> - Adecuación de los significados pretendidos/implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). - Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. - Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad y se flexibilizan los plazos para cumplir con las tareas cuando sea necesario.
--	--

Tabla 5. Componentes e indicadores del criterio afectivo integrando el DUA.

Componentes	Indicadores
Intereses y necesidades	<ul style="list-style-type: none"> - Selección de tareas de interés para los estudiantes. - Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	<ul style="list-style-type: none"> - Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc., reconociendo explícitamente el esfuerzo. - Se reducen las distracciones. - Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	<ul style="list-style-type: none"> - Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia, o miedo a la matemática. - Se resaltan las cualidades de estética y precisión de la matemática

Tabla 6. Componentes e indicadores del criterio ecológico

Componentes	Indicadores
Adaptación al currículo	- Los contenidos, su implementación y evaluación, se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra- e interdisciplinarias	- Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con la matemática del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo), o bien, con contenidos de otras disciplinas (contexto extra-matemático o con contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa).
Utilidad sociolaboral	- Los contenidos son útiles para la inserción sociolaboral.
Innovación didáctica	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.).

Referencias

- Alba-Pastor, C. (Coord.). (2018). *Diseño Universal para el Aprendizaje: Educación para Todos y Prácticas de Enseñanza Inclusivas* (2ª ed.). Ediciones Morata.
- Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, 34(66), 69-88. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04>
- Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R., & Pereira, M. V. (2018a). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, 14(2), 162 -176.
- Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018b). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 32(60), 255–278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893–1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>

- Cerna, L., Mezzanotte, C., Rutigliano, A., Brussino, O., Santiago, P., Borgonovi, F., y Guthrie, C. (2021). *Promoting inclusive education for diverse societies: A conceptual framework* (OECD Education Working Paper No. 260). [https://one.oecd.org/document/EDU/WKP\(2021\)17/en/pdf](https://one.oecd.org/document/EDU/WKP(2021)17/en/pdf)
- Godino, J. D., Batanero, C., y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(6), Artículo e2270. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13187>
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., y Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: an exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430–511. <https://doi.org/10.1080/07370000802177235>
- Praetorius, A.-K., y Charalambous, C. Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: Looking back and looking forwards. *ZDM – Mathematics Education*, 50(3), 535–553. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0>
- Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., y Selter, C. (2022) Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education*, 7, Artículo 969212. <https://doi.org/10.3389/educ.2022.969212>
- Sánchez, A., Ledezma, C., & Font, V. (2025). A proposal of integration of universal design for learning and didactic suitability criteria. *Education Sciences*, 15(7), 909. <https://doi.org/10.3390/educsci15070909>
- Sol, T., Ledezma, C., Sánchez, A. & Font, V. (2025). Teachers' Practical Argumentation on the Teaching of the Pythagorean Theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-025-10591-6>
- UNESCO. (2015). *La Educación para Todos, 2000–2015: Logros y Desafíos*. <https://doi.org/10.54676/GNXA7156>

SITUACIONES DIDÁCTICAS PARA PROVOCAR UN TRABAJO MATEMÁTICO ORIGINAL EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UN POTENCIAL PARA DESARROLLAR CONOCIMIENTOS CRUCIALES

Laurent Vivier - laurent.vivier@u-paris.fr
 Université Paris Cité, LDAR, Francia.

Abstract:

Se propone una reflexión sobre la elaboración de situaciones originales para los profesores de matemáticas. El objetivo de estas situaciones es desarrollar conocimientos que son importantes para su labor docente, pero poco trabajados en su formación. Me focalizo sobre los orígenes de las situaciones, que, a su vez, se inscriben en investigaciones de varios años y, también, sobre el tipo de conocimientos que ponen en juego. Se presentan tres temas matemáticos que tienen un potencial para el diseño de situaciones didácticas: (1) la discrepancia entre lo denso de Q y lo continuo de R para la construcción de las funciones exponenciales; (2) el cuerpo de los números racionales en escritura decimal; (3) los números en base seis. Las dos primeras investigaciones se encuentran actualmente en desarrollo, mientras que la tercera será la que se presentará en detalle durante la exposición.

Situación didáctica, formación de docentes, ingeniería didáctica, base seis

INTRODUCCIÓN

En Didáctica de la Matemática se desarrollan investigaciones con experimentaciones prolongadas que persiguen diversos objetivos. Puede tratarse de la elaboración praxeológica en un REI en la TAD, la aparición de un nuevo conocimiento con las situaciones fundamentales de la TSD, o incluso el diseño específico de una situación para tratar una cuestión de investigación.

En las situaciones prolongadas que voy a presentar, el objetivo es otro. Se trata más bien de provocar un trabajo original que vaya en contra del discurso común o del trabajo tradicional. Mi primera investigación en didáctica (Vivier, 2008) versaba sobre los conjuntos de números y retomaba esta idea de una «doxa» que hay que identificar para buscar otras formas de hacer o de pensar. De hecho, retomé esta idea de doxa en mi HDR en 2015.

El germen de las situaciones suele provenir de ideas matemáticas surgidas de colaboraciones o debates más o menos formales, de la investigación, de la historia, del contacto con otras culturas, entre otras. Estas ideas cuestionan los prejuicios y estereotipos que yo mismo tengo inevitablemente. Entonces hay que realizar un trabajo específico, a menudo matemático, antes de poder explorar su potencial en la didáctica de las matemáticas.

El interés de estas situaciones no radica únicamente en provocar un trabajo original. Por supuesto, esto siempre es interesante, pero el potencial es mayor, ya que permite el desarrollo de conocimientos cruciales, especialmente en la formación del profesorado. Sin necesidad de impartir un curso completo de matemáticas sobre un tema determinado, estas situaciones permiten comprender los retos y las dificultades, a menudo implícitos, a los que se enfrentan o se enfrentarán los profesores en la enseñanza. Por lo general, no tendrán que enseñar los conceptos tal y como aparecen en la situación, pero estos les permitirán dominar mejor determinadas secuencias de enseñanza.

El origen de estas situaciones es largo, con interrupciones y reanudaciones. Se han realizado varias experimentaciones, más o menos dirigidos, con análisis y presentación de los resultados a la comunidad didáctica, que a menudo hay que realizar ajustes a las situaciones y nuevamente probar las modificaciones. El marco general metodológico es la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1988) con el fin de avanzar hacia una situación sólida que permita alcanzar las expectativas. Los análisis se realizan con teorías de la didáctica de las matemáticas. En mi caso, utilizo principalmente la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard, 2022), pues ofrece un marco robusto para caracterizar el trabajo matemático en sus distintas dimensiones, constituyendo un soporte que permite identificar y reflexionar sobre momentos claves de las situaciones estudiadas.

En una primera parte presentaré brevemente la teoría de los ETM. A continuación, expondré las líneas generales de dos situaciones en distintas etapas de avance y, finalmente, desarrollaré con mayor detalle una situación que considero satisfactoria. El propósito no es profundizar en el origen de las situaciones, sino ofrecer un balance de su evolución.

LA TEORÍA DE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICOS

La teoría Espacios de Trabajo Matemático (ETM) se interesa por el estudio del trabajo matemático (Kuzniak, Montoya-Delgadillo y Richard, 2022). La teoría modeliza estos ETM mediante tres componentes de naturaleza epistemológica y tres procesos cognitivos que se relacionan mediante tres génesis: la semiótica, la instrumental y la discursiva.

La génesis semiótica confiere a los signos (representamen) su estatuto de objetos matemáticos operativos que se puede visualizar. La génesis instrumental operacionaliza los artefactos, materiales, software, artefacto simbólico¹, para su uso en el proceso de construcción. La génesis discursiva da sentido a definiciones, teoremas y propiedades (referencial) en el proceso de prueba.

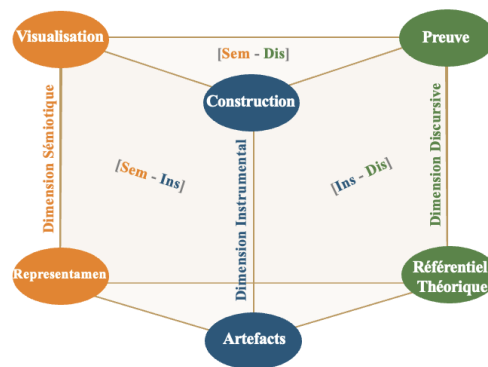
¹ Un artefacto simbólico es una rutina o un algoritmo que se utiliza de manera instrumental. Por ejemplo la técnica de suma de números naturales, la técnica para derivar polinomios, etc.

Frecuentemente, el trabajo matemático muestra una activación simultánea y en simbiosis de dos génesis. Por eso, en la teoría se definen los planos *verticales* [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis].

La figura 1 proporciona una representación visual de esta organización, ofreciendo una visión global que ayuda a reflexionar en el marco de esta teoría.

Figura 1

El diagrama de los ETM (Peteers, Segura, Vivier, 2024).



LAS FUNCIONES EXPONENCIALES Y EL CONTINUO DE R

Origen de la situación

Retomada recientemente, esta situación ha progresado y se ha perfeccionado de manera significativa. Basada en un trabajo sobre la exponencial (Kuzniak et al., 2017), la propuesta busca definir las funciones exponenciales a partir de la propiedad de morfismo y de su valor en 1, sin suponer de antemano ninguna regularidad. Con un trabajo esencialmente semiótico-instrumental permite definir efectivamente las funciones exponenciales en \mathbf{Z} y luego en \mathbf{Q} . En este trabajo, la fórmula $f(x + y) = f(x)f(y)$ se convierte en un artefacto simbólico operativo. Sin embargo, el paso a \mathbf{R} no es algebraico y este trabajo ya no es posible, lo que impone un cambio hacia un trabajo de naturaleza más discursivo. Entonces se comprende que lo que ocurre en \mathbf{Q} es un mundo totalmente diferente de lo que ocurre en, digamos, $\sqrt{2}\mathbf{Q}$. La hermosa regularidad de la exponencial en \mathbf{Q} desaparece para dar paso a un caos en el que las funciones tienen una gráfica densa. Esto permite visualizar una diferencia entre la densidad de \mathbf{Q} y, si no la continuidad de \mathbf{R} , al menos lo que se puede considerar un primer paso hacia la continuidad de \mathbf{R} (Durand-Guerrier, Montoya Delgadillo y Vivier, 2019).

La siguiente fase de la investigación, actualmente en desarrollo y en colaboración con Montoya Delgadillo, busca construir las funciones exponenciales explicando los conceptos relacionados con la completitud de \mathbf{R} , basándose en la topología del orden que, según (Durand-Guerrier, Saby y Planchon, 2025), se utiliza muy poco. La idea es llegar a considerar

y articular diferentes definiciones de las funciones exponenciales y los logaritmos identificando la importancia matemática de la base e .

Conocimientos cruciales de la situación

La situación persigue dos objetivos: (1) definir las funciones exponenciales (y los logaritmos) sin suponer de antemano una regularidad que oculte la diferencia entre las funciones algebraicas y las funciones trascendentes; (2) explicitar las naturalezas topológicas muy diferentes de \mathbf{Q} y \mathbf{R} , lo cual es necesario para el análisis. Estos dos objetivos están desarrollados en la situación. Además, son importantes para los profesores, aunque no tengan que enseñarlos, para que sean conscientes de toda una parte compleja de las matemáticas que en los planes de estudio se ocultan o invisibilizan. Sin llegar a dominar las nociones matemáticas en juego, la situación permite abrir una puerta al mundo matemático más allá de una aparente simplicidad. Esto puede ayudarles a evitar dar una imagen simplista de las matemáticas, así como también, a identificar ciertos malentendidos con los alumnos (Derouet et al., 2016).

LOS RACIONALES EN NOTACIÓN DECIMAL

Origen de la situación

A raíz de una investigación sobre los períodos de los racionales en base Fibonacci (Rittaud y Vivier, 2012a), decidimos extraer las ideas principales de este trabajo para tratar los racionales en un sistema de numeración posicional habitual. El resultado es una construcción del cuerpo \mathbf{Q} únicamente a partir de escrituras decimales periódicas (Rittaud y Vivier, 2024). En particular, se define la suma y la multiplicación de dos racionales, así como entre dos períodos. Estamos desarrollando todo un ETM alternativo sobre los números racionales que permite diferenciarse de la idea de que un racional es una fracción.

Retomamos en particular la cuestión, trabajada en numerosas ocasiones en didáctica, de la comparación entre $0,999\dots$ (infinito de 9) y 1. La identificamos, no como una característica o emblema del paso a \mathbf{R} , sino más bien como una entrada en el cuerpo \mathbf{Q} . De hecho, la identificación es necesaria para tener una suma interesante en \mathbf{Q} o, más precisamente, para poder definir una resta en él. Aquí existe una oposición entre la visualización de $0,999\dots$, que es inferior a 1 según los conocimientos previos, y la necesidad discursiva de desarrollar un corpus matemático sobre los números racionales. Cabe señalar, además, que matemáticamente tener una secuencia infinita de 9 es más interesantes que tratar una secuencia infinita de 0 (Rittaud y Vivier, 2012b).

Se han llevado a cabo varios experimentos. El interés radica en poder trabajar con escrituras decimales periódicas, comprender la necesidad de identificar² $0,999\dots$ y 1 , y luego poder comprender mejor el paso a \mathbf{R} con escrituras decimales ilimitadas (o decimales de Bronner, 2008).

Por el momento, el desarrollo de una situación se encuentra detenida. Por un lado, si la suma es sencilla, la multiplicación es compleja y resulta difícil pensar en hacer trabajar a los profesores en esta operación. Además, se necesitaría una idea aún a desarrollar para poder avanzar hacia los números reales.

Conocimientos cruciales

Se propone una reflexión sobre las representaciones, los tratamientos y las conversiones de los números racionales para los profesores de secundaria. Esto coincide con el punto de vista de Duval (2006), quien señala la necesidad de tener dos representaciones diferentes de un mismo objeto matemático para no confundir el objeto con su representación. Retomo esta afirmación de Duval y la amplío para plantear la necesidad de disponer de dos representaciones *numéricas* de naturaleza diferente para los números, con tratamientos autónomos en cada uno de los dos registros.

Finalmente, podemos separar el objeto número racional de su representación en fracción (que no es unívoca) y obtener una representación en escritura decimal con la que podemos realizar los mismos tratamientos, con una posible elección en función del tratamiento que se desee realizar. Disponemos de dos ETM diferentes por los números racionales, en fracción y en escritura decimal, que podemos conectar.

Por otro lado, también se dispone de una apertura hacia los desarrollos infinitos y, por consiguiente, hacia los números reales en su generalidad, lo que permite comprender en profundidad la necesidad de identificar $0,999\dots$ y 1 sin proponer una demostración a posteriori que no convence a los alumnos (Njomgang Ngansop y Durand-Guerrier, 2014; Mena et al., 2014). Se trata de una necesidad en la construcción de las matemáticas para poder simplificar una relación, es decir, para tener una resta con las propiedades habituales. La situación es muy similar a la igualdad $(-1) \times (-1) = 1$ en la extensión de \mathbf{N} a \mathbf{Z} : es una necesidad si se quiere una estructura matemática interesante y conservar las propiedades algebraicas de tratamiento en \mathbf{N} . Esto se puede mostrar a los alumnos y, por tanto, a los profesores que no son conscientes de ello. Lo que está en juego es la imagen de las

² En general, se da una demostración que, implícitamente, ya supone la identificación. Por ejemplo, al calcular $10 \times 0,999 - 0,999$, se supone la existencia de una resta en el conjunto de las escrituras decimales periódicas (cuando ese es el punto crucial) o también con $1/9 = 0,111\dots$ y multiplicando por 9, donde ya se han identificado, de hecho, los dos tipos de escrituras (por lo que ya estamos en \mathbf{Q}).

matemáticas, para poder entrar en los mecanismos de una construcción necesaria y no como un edificio ya existente.

LA SITUACIÓN DE LA BASE SEIS

Origen de la situación

En la formación inicial de los futuros profesores de primaria, muy a menudo se propone trabajar con números en bases distintas al sistema decimal. El objetivo es concientizar sobre el carácter artificial del sistema decimal en matemáticas y distinguir el número de su representación numérica habitual. Aquí retomamos un trabajo desarrollado durante 15 años (Nikolantonakis, Peteers y Vivier, 2025) sobre este tema que ha dado lugar a la elaboración de una situación ambiciosa y robusta.

Mi investigación comenzó con dos experimentaciones en 2009 y 2010 (Nikolantonakis y Vivier, 2009, 2010), para identificar los conocimientos de los estudiantes y sus dificultades, sin intervenir en la formación. Esta se limitaba a unas pocas horas de formación, a trabajar la codificación, el aspecto ordinal, la conversión entre dos bases, una de las cuales es muy a menudo la base diez, así como algunas operaciones sencillas. La investigación se centró así en cinco tareas que retomaban los temas abordados, como la solicitud de un sucesor o de paridad en una base dada.

En términos teóricos, era evidente que los estudiantes realizaban un trabajo esencialmente en el plano [Sem-Ins], a menudo con una conversión a la base diez para su procesamiento (sin problemas) y luego una reconversión a la base inicial. A falta de desarrollo de ETM en bases distintas de la diez, los algoritmos de conversión y reconversión se basan únicamente en cálculos en base diez, lo que refuerza el peso de esta última. La génesis discursiva tenía dificultades para emerger y, finalmente, ¿eran números estas nuevas escrituras numéricas? ¿reforzaba este trabajo la identificación entre un número y su escritura en base diez?

Los cuestionamientos anteriores y la introducción de las ideas de Tempier (2013) y Chambris (2010) permitieron un desarrollo que se centró, a escala de una sesión (3 horas), en una base única (siete y luego seis), prohibiendo el uso de la base diez (Nikolantonakis y Vivier, 2016). Entre 2013 y 2017 se llevaron a cabo varias experimentaciones. Se partió con semiótica de los aspectos ordinales para luego relacionarlos con los aspectos cardinales y las unidades de numeración. Las sumas también se introdujeron mediante la unión de dos colecciones, lo que condujo naturalmente a una técnica establecida. La intención era claramente construir un ETM de los números, pero, al limitarse a una sola sesión, el ETM idóneo no podía alcanzar el objetivo de la formación. Era una forma de enriquecer la formación añadiendo al trabajo matemático la necesidad de la dimensión discursiva, al tiempo que se mostraba el carácter autónomo de los tratamientos en una base numérica, sin necesidad de conversión a la base

diez. Las preguntas sobre la numeración oral surgieron al final de la sesión, pero no se trataron porque la formación se limitaba a una sola sesión.

El trabajo sigue siendo, sin embargo, muy semiótico, con algunos artefactos simbólicos como la tabla de la sucesión numérica con la que se inició el trabajo. El entorno que se ofrece a los estudiantes sigue siendo pobre, con preguntas que solo se refieren al recuento, las sumas o a los cambios de representación, y únicamente en papel.

En el año 2018 se marca un cambio importante con un intento de trabajar con las cuatro operaciones, de explorar otras partes de las matemáticas, como la aritmética, los números racionales (fracciones y números decimales) y reales (raíces cuadradas y π), en particular mediante un trabajo de medición de magnitudes y el uso del teorema de Pitágoras. Se pide también nuevas palabras en base seis, como para la numeración oral o las unidades de medidas. El resultado superó nuestras expectativas y demuestra que es posible realizar un trabajo mucho más ambicioso, que abarca la mayor parte de los conocimientos matemáticos exigidos a los profesores de primaria (Braconne-Michoux, Nikolantonakis y Vivier, 2019). De esta investigación emergieron dos ETM en dominios diferentes, esto puede considerarse como una elaboración espontánea de un ETM idóneo que tiene en cuenta el ETM de los números en base seis y el ETM de la geometría.

En 2019, y posteriormente en 2022, 2024 y 2025, se trata de un ETM idóneo mejor pensado, en el sentido de que hemos reflexionado más sobre las tareas propuestas, su progresión, las variables que se ofrecen a los estudiantes y un medio más rico (Peteers y Vivier, 2022, 2023; Peteers, Segura, Vivier, 2024). En particular, la articulación entre el sistema sécimal y el sistema de medidas de las longitudes y la elaboración de una herramienta para medir las longitudes (una regla) constituyen momentos fuertes de la situación. El resultado es: la construcción de un ETM de los números naturales en base seis, apoyándose sobre el ETM usual en base diez, pero con una autonomía; la extensión de este ETM a los números racionales y reales en articulación con un ETM de las magnitudes de la geometría.

Conocimientos cruciales de la situación

Aquí podríamos retomar lo que se ha dicho sobre las representaciones de los números racionales en la sección anterior. De hecho, al final de la situación, disponemos de dos ETM de los números, uno en base seis y otro en base diez, cada uno con sus propios tratamientos.

La situación también tiene otros objetivos. A menudo, el sistema decimal se utiliza bastante bien, pero los futuros profesores de primaria no comprenden bien su funcionamiento. Al enfrentarse a la base seis, los futuros profesores desarrollan conocimientos que les permiten redescubrir el sistema decimal. Se trata de conocimientos cruciales para su futura profesión, para que su enseñanza no se oriente únicamente hacia un uso semiótico-instrumental.

Por otro lado, los profesores en formación se dan cuenta de la complejidad del sistema numérico y de la dificultad cognitiva de ciertas tareas, como la de nombrar un número escrito con cifras en base seis utilizando la numeración oral planteada por los estudiantes. Esto les permite comprender, a través de esta situación, las posibles dificultades de sus futuros alumnos.

CONCLUSIÓN

Las situaciones presentadas abordan saberes y conocimientos que están en juego —a veces de manera poco visible— en la enseñanza de las matemáticas, y que resultan fundamentales para el profesor, aun cuando no forme parte de su responsabilidad enseñarlos explícitamente. Dichos conocimientos le permiten comprender con mayor profundidad los conceptos que debe enseñar.

Por otro lado, estas situaciones ofrecen una perspectiva distinta de las matemáticas respecto de la que suele presentarse, al enfrentarlos a diversos obstáculos epistemológicos y didácticos, que posteriormente son parte de reflexiones profundas. Con ello, permiten ir más allá de las apariencias y mostrar la complejidad y riqueza de conceptos que, en un primer momento, podrían parecer familiares. El cuestionamiento que generan contribuye a cambiar la imagen de las matemáticas.

Por estas razones, considero que estos conocimientos son cruciales para la formación y desarrollo profesional de los profesores.

Referencias

- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.
- Braconne-Michoux, A., Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2019). La numération décimale en formation initiale des enseignants du premier degré, In Vivier, L., Montoya Delgadillo, E., Richard, P. R., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M. & Tanguay, D. (Eds). (2019), *Actas del Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático (ETM6, 13-18 de diciembre 2018)*. Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 513-516.
- Bronner, A. (2005). La question du numérique dans l'enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires, *Actes de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, Ste Livrade, 18-26 août 2005.
- Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30, 317–366.
- Derouet, C., Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Paez Murillo, R. E., Rouse, S., Vandebrouck, F., Verdugo, P., Vivier, L. (2016) Espace de Travail Mathématique, In Y. Matheron, G. Gueudet et al. (Ed.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la XIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques, Brest, août 2015*, 421-440, La Pensée Sauvage.

- Durand-Guerrier, V., Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2019). Real exponential in discreteness-density-completeness contexts, J. Monaghan, E. Nardi and T. Dreyfus (Eds.) (2019), *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics – Conference proceedings*. Kristiansand, Norway: MatRIC, 87-90.
- Durand-Guerrier, V., Planchon, G., & Saby, N. (2025). Sur le rôle de l'ordre en analyse a la transition secondaire – supérieur, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **4**, p. 129 – 158. IREM de Strasbourg.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103-131.
- Kuzniak, A., Mena Lorca, A., Mena Lorca, J., Tanguay, D., Montoya Delgadillo, E., & Vivier, L. (2017). Conectar los ETM del análisis: el caso de la función exponencial, In Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Nikolantonakis, K., Richard, P.R., Vivier, L., *Actes du Cinquième Symposium ETM*, 18-22 juillet 2016, Florina, Grèce, Université de Macédoine Ouest, 49-62.
- Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. & Richard, P. eds. (2022). *Mathematical Work in Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective*, Mathematics Education in the Digital Era, 18, Springer.
- Mena, A., Mena, J., Montoya, E., Morales, A. & Parraguez, M. (2015). [The epistemological obstacle of the actual infinity: persistence, resistance and categories of analysis](#), *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*, 3, 329-358.
- Nikolantonakis, K., Peteers, F. & Vivier, L. (2025). Genèse d'un ETM idoine de formation original sur le nombre pour de futurs professeurs d'écoles, *Actes du Huitième Symposium ÉTM*, 21-25 octobre 2024, Universidad de Cantabria, Espagne. En prensa.
- Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2010). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, in *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*, Actes du 5^e colloque A.S.I., J.-C. Régnier, F. Spagnolo, B. Di Paola & R. Gras édés, Palermo 2010.
- Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies, in *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques*, Gagatsis, A., Kuzniak, A. Deliyianni, E. & Vivier, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre.
- Nikolantonakis, K., et Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, *30*(54), 23-44.
- Njomgang Ngansop J. & Durand-Guerrier V. (2014). $0, 999\dots = 1$ an equality questioning the relationships between truth and validity. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti, *Proceedings of CERME 8* (pp. 196-205). Middle East Technical University, Ankara, Turquie.
- Peteers, F., [Segura Corella, N.](#), & Vivier, L. (2024). La comprensión de un espacio de trabajo matemático (ETM) en base seis por parte de futuros profesores de primaria y su influencia en el ETM en base diez. *UCMaule*, *67*, 112-135. <https://doi.org/10.29035/ucmaule.67.112>
- Peteers, F., et Vivier, L. (2022). Les mathématiques pour la formation des enseignants du premier degré revisitées par le système décimal. *Grand N*, *109*, 33- 54.

- Peteers, F., et Vivier, L. (2023). Petit détour par le système décimal. Dans C. Derouet, A. Nechache, P. R. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (pp. 431-442). IREM de Strasbourg, 27 juin-2 juillet 2022, Strasbourg (France).
- Rittaud, B. & Vivier, L. (2024). The Field \mathbb{Q} and the Equality $0.999\dots = 1$ from Combinatorics of Circular Words and History of Practical Arithmetics, *The Mathematics Enthusiast*, 21(1-2), 3–34.
- Rittaud, B. & Vivier, L. (2012a). Circular words, F-adic numbers and the sequence 1, 5, 16, 45, 121, 320, ..., *functiones et approximatio commentarii mathematici*, 47(2), 207-231.
- Rittaud, B. & Vivier, L. (2012b). Does numerology allow a group to have two identity elements?, *American Mathematical Monthly*, 119(4), 283-289.
- Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de didactique des disciplines, spécialité didactique des mathématiques. Université Paris Diderot.
- Vivier, L. (2008). De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 13, 63 - 92.

INTRODUCCIÓN ACTAS CONFERENCISTAS NACIONALES

Las XXIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática reúnen no solo a reconocidos especialistas internacionales, sino también a un destacado grupo de académicos y académicas nacionales cuya labor investigativa ha contribuido de manera sostenida al desarrollo del campo en Chile. La diversidad de enfoques y líneas de investigación presentes en esta edición refleja la vitalidad de la comunidad chilena de educación matemática y su compromiso con avanzar hacia una enseñanza más crítica, inclusiva y situada en los desafíos actuales del sistema educativo.

Los conferencistas nacionales invitados representan múltiples áreas de especialización que dialogan con las problemáticas emergentes en la formación docente, la didáctica de los diferentes contenidos matemáticos, el desarrollo profesional, la inclusión, la primera infancia y las perspectivas críticas e interdisciplinarias de la educación. Su participación en estas jornadas no solo fortalece la circulación de conocimiento a nivel local, sino que también permite visibilizar investigaciones consolidadas y nuevas aproximaciones que están configurando el rumbo de la disciplina en el país.

En este contexto, el Taller de Diseño de Proyectos Fondecyt de Iniciación, impartido por el Dr. Horacio Solar, se constituye en una instancia formativa relevante para investigadores e investigadoras en etapa inicial. A través del análisis de los criterios de evaluación del concurso y de tensiones frecuentes en investigaciones en didáctica de la matemática, el taller ofrece orientaciones concretas para la formulación del problema, la revisión crítica de la literatura, la construcción del marco teórico y la coherencia metodológica de las propuestas. De este modo, contribuye a fortalecer las capacidades de la comunidad académica para diseñar proyectos rigurosos y pertinentes que aporten al desarrollo de la educación matemática en Chile.

Las conferencias dictadas por estos especialistas ofrecen una mirada profunda a temas como la argumentación y la modelación matemática, la educación estadística, la educación matemática crítica, el espacio de trabajo matemático, la formación práctica, la enseñanza de la matemática en la primera infancia, la epistemología del álgebra lineal, la interdisciplinariedad STEM, y los estudios sobre inclusión y diversidad. Estos aportes permiten no solo actualizar el estado del arte nacional, sino también promover un diálogo necesario entre investigación, política educativa y práctica pedagógica.

La presente sección reúne las actas de estas conferencias, así como del taller antes mencionado, las cuales buscan constituirse en un insumo significativo para investigadores, formadores de docentes y profesionales interesados en comprender y proyectar los desarrollos actuales de la educación matemática en Chile.

TALLER POSTULACIÓN Y DISEÑO DE PROYECTOS DE FONDECYT DE INICIACIÓN

Horacio Solar Bezmalinovic - hsolar@uc.cl
Pontificia Universidad Católica de Chile

INTRODUCCIÓN

En la formación doctoral cada vez es más incorporar una línea de cursos asociados a la “escritura de proyectos” que tienen como propósito desarrollar habilidades para la preparación al examen de candidatura de la tesis. La literatura que se utiliza en estos cursos generalmente proviene de libros o artículos que tratan sobre el diseño de una investigación en ciencias sociales que entregan orientaciones sobre cómo desarrollar investigaciones principalmente en el contexto de las psicología, sociología o educación en general (ej. Badke, 2011; Cohen et al., 2011, Wisker, 2001). A la hora de diseñar una investigación en relación a la Didáctica de matemática, se carece de literatura que pueda entregar orientaciones sobre los criterios relevantes a considerar en este ámbito lo que puede dificultar al estudiante doctoral a cumplir criterios propios de la disciplina. Esta misma tensión se proyecta en la trayectoria de investigadores noveles al enfrentarse a postulaciones a fondos externos como es el Fondecyt de Iniciación.

El propósito de este taller es poder entregar orientaciones para la postulación a proyectos investigadores noveles que considere tanto los criterios propios de investigación en ciencias sociales, como los propios del área de Didáctica de la Matemática.

OBJETIVOS DEL TALLER

- Caracterizar formulación de la problemática y marco teórico en relación da didáctica de la matemática
- Caracterizar criterios de aspectos de diseño metodológico de éxito en investigaciones en Ciencias sociales, con relación al área de didáctica de la matemática

METODOLOGÍA DEL TALLER

Primera parte:

Describir los criterios de éxito en la postulación al Fondecyt Iniciación:

- Presentación de criterios de postulación al Fondecyt 2026
- Presentar criterios de evaluación publicados
- Presentación de rúbrica anteriores, que, si bien ya no se utilizan, detallan indicadores observables de lo que se espera en el diseño de un proyecto.

Segunda parte:

En el taller se discutirá con base a los criterios de logro de investigación que considera los proyectos Fondecyt de iniciación. Para cada tema, se presentará:

- Ejemplos de tensiones o dificultades que se pueden encontrar en un proyecto del área.
- Orientaciones generales de investigación en el área de ciencias sociales
- Consideraciones en el área de Didáctica de la Matemática

Dimensiones de proyecto

Formulación del problema: Se presenta el problema, de manera concisa y simple, utilizando conceptos clave. Además, está adecuadamente tipificado

Criterios:

- Cautelar construcción de conocimiento
- Explicitar el lenguaje con carga teórica
- Explicitar el contexto/condiciones.
- La pregunta es comprensible por una gran comunidad.

Relevancia del problema: Se demuestra, con argumentos sólidos, lo significativo del problema presentando antecedentes teóricos, empíricos y prácticos que permiten justificarlo. Se destaca el aporte del proyecto al área de investigación.

Criterios

- Conocer íntegramente el campo disciplinar
- Comenzar con afirmaciones generales que sitúen el problema de investigación
- Relevancia Social (también puede ser científica)
- Ser persuasivo
- Apelar y reconocer avances de la comunidad local
- Cautelar/Explicar el lector cual es el valor agregado del proyecto

Análisis crítico de la bibliografía: Se realiza una revisión y un análisis crítico de las investigaciones clave en el tema de la propuesta ubicando el problema en el contexto de los trabajos de investigación realizados en el área y justificando las opciones tomadas para el proyecto.

Criterios

- Secuencia ordenada / lógica del argumento de la problemática
- Vinculación de los antecedentes empíricos y teóricos con la investigación
- Hallazgos de la revisión crítica de la literatura ser usados como afirmaciones para construir la problemática

- Revisión crítica de la literatura permite establecer lo conocido y no conocido para delimitar la pregunta
- Contribuye al argumento en términos de relevancia y eficacia al menos en lo referido a lo sustantivos, teórico y metodológico.
- Dar todos los antecedentes para responder a la pregunta
- Conclusión reflexiva a partir de la Revisión crítica de la literatura
- Es posible establecer qué enfoque metodológico es el más adecuado para su propósito. Cautelar consistencia metodológica con la problemática
- Indicadores claros que les permitan establecer conexiones entre una sección o capítulo y lo que sigue. (Redundancia efectiva)
- Incorporar estudios clave que puede desencadenar la pregunta de investigación
- Hacer un mapa de argumentos desde la revisión de literatura

Fundamentación teórico-conceptual: Se definen satisfactoriamente los conceptos clave vinculados con el problema discutiendo y resolviendo las ambigüedades presentes en la literatura revisada. Se articulan coherentemente los distintos conceptos con el fin de sustentar las posteriores decisiones metodológicas.

Criterios

- Los aportes del estudio (metodológico, teórico, práctico)
- Destacar la ausencia de estudios
- Impacto en la política pública/ contextual

Novedad de la propuesta: Se destaca con argumentos sólidos el potencial impacto y la novedad científica de la propuesta.

- Los aportes del estudio (metodológico, teórico, práctico)
- Destacar la ausencia de estudios
- Impacto en la política pública/ contextual

Formulación de hipótesis de investigación o pregunta de investigación: Las hipótesis o preguntas de investigación son claras y están adecuadamente articuladas con la fundamentación teórica-conceptual.

Objetivos: son coherentes con el problema y con las hipótesis o preguntas formuladas. Se distinguen claramente los objetivos generales de los específicos.

Selección del diseño: El diseño elegido muestra de manera precisa como este permitirá lograr los objetivos y contrastar todas las hipótesis o responder a todas las preguntas propuestas.

Se seguirán presentando dimensiones propias de un diseño de investigación con la misma estructura indicada

CONCLUSIONES

El taller terminará con un resumen de las consideraciones más importantes para el diseño de proyectos asociado al área de Didáctica de la Matemática.

Referencias

- Cohen, L., Lawrence, M., & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7th ed.): Routledge.
- Badke, W. (2011). *Research Strategies. finding your way through the information fog* Bloomington, En: IUniverse, Inc Wisker, R. (Cap. 2 Taking Charge pp 19- 41).
- Wisker, G. (2001). *The postgraduate research Handbook*. Palgrave Macmillan: Hampshire (Cap. 5 Research Questions and Hypotheses).

¿PARA QUÉ INVESTIGAR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA? (RE)PRODUCCIÓN CONOCIMIENTO COMO UNA ITERACIÓN

Alex Montecino - amontecinom@academicos.uta.cl

Universidad de Tarapacá

Abstract:

Este trabajo problematiza el sentido de investigar en educación matemática en un contexto de expansión acelerada de publicaciones y de una crisis en la distribución global del conocimiento. A partir de la pregunta ¿para qué investigamos en educación matemática?, se analiza la publicación no como un canal neutral, sino como un dispositivo psicopolítico que produce subjetividades, regula prácticas de escritura y condiciona lo que se reconoce como conocimiento válido. Se sostiene que el tipo de investigación —teórica y metodológicamente hablando—, criterios de revisión, sistemas de indexación y rankings estabilizan un repertorio de lo publicable, homogeneizando métodos, tiempos y audiencias, lo cual refuerza una economía de la visibilidad asociada al rendimiento. Desde la noción de régimen de transparencia, se argumenta que la excelencia se redefine como la susceptibilidad de ser cuantificado, favoreciendo estrategias de optimización y desplazando trabajo lento, situado o conceptualmente riesgoso. Este marco se articula con lecturas de gubernamentalidad que permiten comprender cómo la conducción de conductas opera mediante incentivos y comparaciones, configurando al investigador como emprendedor de sí. Finalmente, se discute el giro social, crítico y político como una iteración que renueva lenguajes y agendas sin alterar necesariamente las reglas de reconocimiento, lo que ayuda a explicar la persistencia de una brecha entre promesas transformadoras e intervención pedagógica —principalmente, por que no se ha cumplido—. Se concluye proponiendo mantener la pregunta abierta, dada que se entiende que el campo está en disputa por las condiciones mismas de (re)producción y validación del conocimiento.

(Re)producción de conocimiento, iteración, epistemología, régimen de transparencia

A MODO DE INTRODUCCIÓN: NUESTRO QUEHACER COMO UNA PROBLEMÁTICA

En los últimos años, las publicaciones en el campo de la educación matemática, en particular en revistas indexadas, ha aumentado de forma significativa. Lewis et al. (2021) informan que, a nivel mundial, la producción anual de publicaciones científicas aumentó un 21% entre 2015 y 2019. Sin embargo, este crecimiento también ha puesto en evidencia que existe una crisis en la publicación académica y, en general, en el sistema global de distribución del conocimiento (Altbach & de Wit, 2018), esto se debe, en gran medida, a la persistencia de estructuras que propician violencia geo-onto-epistémica, al imponer un único modo legítimo de producir y reproducir (desde ahora en adelante (re)producir) de conocimiento,

invisibilizando aquellas formas de ser y hacer que se sitúan fuera de dicho modelo. Esta crisis subraya la urgencia de reexaminar los fundamentos y propósitos de la educación matemática, cuestionando cómo el conocimiento, tanto el matemático como el producido en educación matemática, y su difusión pueden perpetuar o desafiar estructuras de poder (Paterno et al., 2023; Valero et al., 2015).

En esta línea, el aumento en el número de publicaciones en el área se ha problematizado, dado que se reconoce que publicar se ha convertido en un indicador de productividad o de competencia y competitividad (Hsu et al., 2015), tanto a nivel individual como institucional. Lo que posiciona nuestro quehacer —(re)producir conocimiento— dentro de una lógica de mercado, ligadas a cuestiones de poder y control social, por sobre cuestiones de relevancia social y pertinencia pedagógica (Montecino, 2023). Aún más, nos imposibilita de entender la (re)producción de conocimiento como un acto creativo. Esta mercantilización del conocimiento, incentivada por la presión de “publicar o perecer”, ha distorsionado los objetivos intrínsecos de la investigación, privilegiando la cantidad sobre la calidad y la relevancia social (da Costa et al., 2023), así como favoreciendo una forma de hacer investigación —teórica y metodológicamente hablando— por sobre otras, al mismo tiempo, trazando una forma de entender lo que considera como investigación. Al respecto, Montecino (2021) nos plantea naturalización de una estética que perpetua el cómo concebimos la investigación y sus parámetros de belleza, lo bueno y deseado.

En este panorama, este artículo levanta un cuestionamiento en torno a la pregunta: ¿para qué investigamos en educación matemática? Con esto se busca problematizar la instrumentalización del conocimiento y reflexionar críticamente sobre los marcos de referencias y estructurales que sustentan nuestra práctica investigativa (Montecino, 2023). Así como, reflexionar sobre el propósito de la (re)producción de conocimiento en el campo y su impacto real en la transformación de las prácticas educativas y sociales.

INVESTIGANDO BAJO UN RÉGIMEN DE TRANSPARENCIA

La forma en que se investiga, y con ello se (re)producir conocimiento, no solo expresa competencias teóricas, metodológicas y técnicas, sino que también revela intereses, disposiciones epistémicas, inserciones en redes de colaboración, capacidades de respuesta a agendas locales e internacionales y posibilidades de atraer financiamiento. Al analizar la investigación del campo, esta suele quedar organizada por discursos positivistas y neopositivistas que delimitan qué se considera conocimiento válido y bajo qué formatos debe comunicarse. Lo que restringe la diversidad de enfoques teóricos y metodológicos, por ejemplo, invisibiliza contribuciones de perspectivas críticas o decoloniales que disputan narrativas dominantes (Montecino, 2023; Rodríguez, 2021). Siguiendo a Mills (2004), esta configuración puede comprenderse como un doble movimiento de estructuración y circulación. Por un lado, la estructuración opera mediante la definición de formas de ser y

hacer, formatos y criterios de revisión que establecen condiciones para dar forma a lo deseable. Por otro lado, la circulación se materializa en revistas, sistemas de indexación y rankings que ordenan la visibilidad y consolidan homogeneidad dentro de límites reconocidos, estabilizando qué tipo de investigación se vuelve publicable.

Esta dinámica se intensifica bajo el régimen de la transparencia, entendido este no como principio ético acotado a la anticorrupción, sino como un imperativo sistémico que reorganiza las esferas sociales y reorienta las prácticas hacia la visibilidad permanente y la rendición de cuentas (Han, 2015b). En el contexto de la educación matemática, esto se expresa en un ecosistema que se alimenta de metadatos que emergen de indexaciones de revistas, rankings, diferentes índices —tal como el índice h—, y de plataformas de trazabilidad y autopresentación académica, como lo es: ORCID, Google Scholar, ResearchGate o Academia.edu. Este entramado convierte la (re)producción de conocimiento en una actividad cuantificable según los parámetros de la transparencia y culmina por redefinir lo que se entiende como valor, legitimidad y excelencia académica, trazando procesos formativos y las prácticas investigativas a lógicas de medición, vigilancia y competencia. Por ejemplo, si reducimos la (re)producción de conocimiento a la publicación de un artículo, podemos entender que este —el artículo publicado— se convierte en una unidad comparable y gobernable mediante conteos, cuartiles y tasas, en otras palabras, adquiriendo un peso o valor en función a estas métricas. Bajo esta racionalidad, la productividad tiende a redefinirse como lógica de exhibición, donde lo más visible y contable adquiere mayor valor que la densidad teórica, la pertinencia contextual o el impacto social, lo cuales no se han reducido a indicadores (Fejes & Nylander, 2017; Han, 2015b) con el peso suficiente para desplazar la atención hacia ellos.

Volviendo al artículo, como el acto de potencia pura que condensa la (re)producción de conocimiento y todo acto investigativo, al publicar un artículo una parte sustantiva de lo estructural se vuelve legible mediante de los datos y metadatos que acompañan a las ideas desarrolladas en las escasas páginas que resumen una labor que en ocasiones implican años de trabajo y un sinfín de esfuerzos personales y colectivos. Por ejemplo, el orden de autoría, las afiliaciones, los países y agradecimientos, entre otros, exponen intersecciones en comunidades epistémicas, infraestructuras de financiamiento y jerarquías de poder que inciden en la conformación de agendas de investigación.

En este contexto, la emergencia de un “artículo ideal-típico” contribuye a una operacionalización concreta de la estructuración y la circulación, al fijar una estética y un guion de legibilidad que modelan la reproducción del campo (Montecino, 2021; Niss, 2019). Tales mecanismos reconfiguran incentivos y favorecen estrategias de optimización, como coautorías estratégicas, cuidado de perfiles y maximización de citas, mientras desplazan a los márgenes trabajos más lentos, situados o conceptualmente riesgosos, cuyo valor se

realiza en temporalidades y procesos menos contables. Este desplazamiento tiende, además, a homogeneizar la investigación, por ejemplo, mediante la priorización de metodologías cuantitativas en desmedro de aproximaciones cualitativas y críticas que podrían ofrecer comprensiones más densas y contextualizadas (Navas & Fuentes, 2020). En términos foucaultianos, estos dispositivos operan como tecnologías gubernamentales que no gobiernan por prohibición, sino por incentivos que orientan deseos, tiempo y atención hacia lo medible (Foucault, 2009). Dando forma a las condiciones de posibilidades que producen investigadores como empresarios de sí, sujetos que internalizan la lógica de la competencia y la optimización permanente, organizando sus prioridades, afectos y esfuerzos según los indicadores que definen qué cuenta como conocimiento válido y qué trayectorias merecen reconocimiento dentro del campo académico. Esta intensificación de la vigilancia y el control sobre la producción académica ha llevado a una redefinición de la excelencia, que ahora se mide en métricas cuantitativas, como el número de publicaciones en revistas indexadas de alto impacto y el índice de citación (Fardella-Cisternas et al., 2020).

En otras palabras, la consolidación de un “artículo ideal-típico” como horizonte de reconocimiento y legitimidad en el campo académico, contribuye un ejercicio del poder, concreto, al establecer condiciones tácitas para que algo cuente como investigación válida, estrechando así el repertorio de lo publicable y modelando la reproducción del campo (Montecino, 2021; Niss, 2019). Niss (2019) advierte que este tipo de artículo configura “una comprensión demasiado estrecha y rígida de la investigación en educación matemática” (p. 2), reduciendo la multiplicidad de formas de hacer y pensar el acto investigativo a un formato normalizado que articula problemas, marcos teóricos, métodos y resultados según criterios de claridad, eficiencia y replicabilidad propios de una racionalidad técnico-gerencial. Estos mecanismos se refuerzan en la cultura de la meritocracia, donde la proliferación de dispositivos que convierte en datos el desempeño (Fardella et al., 2024), reorganizando los incentivos, con ello, favorecer estrategias de optimización —coautorías estratégicas, cuidado de perfiles, curaduría de trayectorias y maximización de citaciones—.

Así, la definición de excelencia se reescribe como un umbral cuantitativo de rendimiento — número de artículos en revistas indexadas de alto impacto, posición en rankings, índices de citación— que opera como límite de prestigio y como criterio de distribución de recursos, distinciones y autoridad epistémica (Fardella et al., 2024; Fardella-Cisternas et al., 2020).

Desde la perspectiva de los estudios de gubernamentalidad, las formas de (re)producción de conocimiento y de subjetividad se vuelven norma y otras se tornan impensables o quedan marcadas por la sospecha de falta de rigor (Burchell et al., 1991; Foucault, 2009). La gubernamentalidad académica se expresa, entonces, en la articulación de programas, tecnologías y formas de hacer que conducen la conducta (Rose et al., 2006) mediante el establecimiento de modos de escribir, investigar y valorarse a sí mismos. En línea con la

lectura de Lorenzini y Tiisala (2024), se puede decir que estos dispositivos reordenan y configuran un campo donde las posibilidades quedan limitadas por los mismos instrumentos que distribuyen prestigio y visibilidad, así como produce sujetos que se reconocen a sí mismos y a sus pares, fundamentalmente, como agentes de rendimiento.

LO SOCIAL, CRÍTICO Y POLITICO: COMO UNA ITERACIÓN MÁS

Desde lo denominado como giro social en educación matemática, el campo ha abierto sus horizontes analíticos más allá del triángulo didáctico, propiciando una agenda que interroga las implicaciones sociales, críticas y políticas de la educación matemática, además promueve una revisión de su propósito formativo y uso de la matemática en la sociedad contemporánea (Gutiérrez, 2013; Valero et al., 2015). Este giro no solo diversifica objetos de estudio, sino que además reconfigura preguntas epistemológicas de fondo al problematizar los criterios de científicidad y los regímenes de (re)producción/validación del conocimiento que, con frecuencia, delimitan lo que cuenta como evidencia legítima.

En este giro, la enseñanza y aprendizaje de la matemática deja de ser tratado puramente desde lo cognitivo y se entiende crecientemente como un producto situado de la actividad social. Se consolida una lectura no neutral de las matemáticas, comprendiéndolas como prácticas imbricadas en valores y relaciones de poder que configuran subjetividades y vínculos sociales, por lo que su enseñanza puede funcionar tanto como un medio de (re)producción del poder hegemónico, así como un medio para cuestionar estructuras de dominación (Fresneda-Patiño & Sánchez Coral, 2023; Mancera-Ortiz et al., 2022).

De ahí que la educación matemática crítica haya insistido en analizar cómo la sociedad usa las matemáticas, cuáles son las consecuencias de ese uso y cómo dichas implicancias se sedimentan en prácticas educativas que atraviesan la escuela y el tejido social, conectando alfabetización matemática, justicia social y ciudadanía crítica como horizonte normativo y político del campo (Clavijo-Riveros et al., 2023; Santos & Torisu, 2023; Silva et al., 2020). Por lo tanto, este enfoque busca trascender la mera instrucción técnica para dotar a los estudiantes de una comprensión profunda de la realidad, capacitándolos para participar plenamente en una sociedad democrática.

No obstante, la literatura reciente sugiere una distancia entre la expansión conceptual promovida desde el giro social y su traducción en transformaciones pedagógicas. Lo que se manifiesta en el predominio de trabajos de carácter teórico reflexivo y en la menor presencia relativa de estudios que documenten intervenciones situadas y sus efectos en prácticas, relaciones y aprendizajes (Clavijo-Riveros et al., 2023).

Esta tensión puede interpretarse iteración matemática. Aunque el campo actualiza periódicamente sus focos y lenguajes, la dinámica que organiza la (re)producción de conocimiento, se tiende a preservar invariantes, entre ellos, los formatos de publicación, los

criterios de reconocimiento y las economías de evidencia que establecen qué tipo de trabajo resulta más publicable. Bajo estas condiciones, el movimiento del campo se asemeja a una sucesión generada por una regla que, pese a incorporar variaciones, converge hacia un mismo atractor. En otras palabras, si pensamos que la (re)producción de conocimiento se puede entender como: $x_{n+1} = f(x_n)$, donde x_n se redefine en cada giro de la educación matemática. Sin embargo, solo es posible hacerlo, al parecer, bajo reglas de funcionamiento relativamente estables, que operan como la función f que produce el siguiente estado x_{n+1} . Cambia lo que se declara como objeto prioritario, pero permanecen invariantes los mecanismos que organizan la (re)producción de conocimiento. Así, la investigación vuelve a lo mismo no porque los distintos giros carezcan de potencia teórica, sino porque —como advierten Artigue y Kilpatrick (2008)— el campo de la educación matemática está atravesado por una tensión estructural entre la aspiración a la innovación y la necesidad de estabilizar marcos conceptuales que otorguen coherencia y legitimidad al conocimiento producido. La construcción de conocimiento en la disciplina se mueve en ciclos donde nuevas perspectivas buscan responder a problemas persistentes, pero terminan tendiendo a formas de ser y actuar previas, reproduciendo así una suerte de estabilidad epistemológica que limita la capacidad transformadora de los avances. En este entramado, el cambio opera como una promesa proyectada hacia el futuro, una promesa que se renueva con cada giro teórico, pero que se difiere continuamente debido a las condiciones mismas bajo las cuales la comunidad define qué cuenta como conocimiento válido.

En consecuencia, aun cuando cambian los focos declarados, el campo retorna con frecuencia a resultados similares. Esta dinámica es consistente con los patrones históricos identificados por Inglis y Foster (2018) en su análisis de cinco décadas de evolución de la revista *Educational Studies in Mathematics*. Los autores muestran que, pese a las variaciones temáticas y metodológicas que han atravesado la revista —incluyendo el surgimiento de nuevas agendas, el desplazamiento hacia enfoques cognitivos, socioculturales o políticos, y la diversificación de marcos analíticos—, persisten problemas recurrentes, preguntas fundacionales y estructuras de argumentación que reemergen de manera cíclica. Tales continuidades no sólo evidencian la resiliencia de ciertas preocupaciones centrales de la disciplina, sino también los límites institucionales y epistemológicos que moldean lo que la comunidad considera como contribución válida. Así, pareciera que lo nuevo, raramente, se desmarca de aquello que históricamente se ha configurado como investigación en educación matemática.

En este sentido, la promesa transformadora del giro social no se agota por falta de ideas, sino porque la iteración disciplinar reproduce condiciones que estabilizan el movimiento y hacen que la crítica circule con fuerza en el plano discursivo, pero con menor potencia en el plano de la implementación, justo donde se juega la posibilidad de hacer diferencia en aulas,

escuelas y territorios. Esta situación subraya la necesidad de una crítica de la crítica, que cuestione cómo la propia articulación epistémico-política del discurso crítico puede instituirse y naturalizarse, obstaculizando así la búsqueda de soluciones efectivas y la implementación de acciones transformadoras en la práctica social.

LA EXPOSICIÓN ES EXPLOTACIÓN: EL INVESTIGADOR COMO EMPRENDEDOR DE SÍ

Han (2015a) sostiene que una lógica inmunológica de la negatividad configuró el siglo XX. Se trataba de una sociedad que buscaba protección frente a la otredad mediante prohibiciones y defensas que trazaban fronteras estrictas entre lo familiar y lo ajeno, lo interno y lo externo, lo cercano y lo distante. Por el contrario, el siglo XXI se organiza mediante una lógica de la positividad. Aquí, el mandato asume la forma de invitación. Ya no dice “no debes”, sino “puedes”. La gobernanza opera menos por exclusión que por la movilización de la libertad, la iniciativa y el optimismo. Se incita a los individuos a develarse, conectarse y optimizarse en plataformas y métricas. La visibilidad y el auto-trazado se convierten en signos de virtud. La coerción se internaliza como autogestión y la promesa de posibilidades ilimitadas se vuelve sombra de agotamiento, ansiedad y burnout. En este régimen, es el deseo, más que la prohibición, el que coordina la conducta, convirtiendo la autonomía en un dispositivo sutil de control.

El imperativo del “puedes” reconfigura al investigador como emprendedor de sí, vale decir, como gestor de su productividad personal, de su trayectoria y de su empleabilidad. En este entorno, los académicos orientan sus esfuerzos hacia revistas que prometen mayores retornos, recalibrando sus agendas hacia lo que se ve y se mide. La potencia epistémica, entendida como la capacidad de abrir problemas, desestabilizar certezas y espesar la comprensión, se vuelve una externalidad del sistema, un lujo que solo se persigue una vez que se cumplen las métricas. El desempeño se desplaza de ser un medio a ser una identidad. Ya no se produce productividad, sino que se es productividad. En un campo reordenado por la exposición, donde el impacto se equipara con visibilidad y posición, el investigador es gobernado por vitrinas e indicadores, actualizando perfiles, optimizando palabras clave y proyectado las veces que será citado. El resultado es un bucle de autoexplotación en el que la autonomía se moviliza como obligación y el valor académico se confunde progresivamente con sus trazas cuantificables.

Cuando la (re)producción de conocimiento fracasa, por ejemplo, un artículo no se publica o un proyecto no obtiene financiamiento, la atribución causal recae en el individuo. Este no fue lo suficientemente claro, o su elección de revista o fondo no fue la adecuada, o simplemente, no supo vender su contribución. Esto refuerza una espiral de esfuerzo, auto-vigilancia y autorreproche (Knepper et al., 2024). La responsabilidad se individualiza y se oscurecen las condiciones estructurales que reproducen inequidades. Por ejemplo, Darragh et al. (2024)

informan que autores de América Latina y de otros contextos no dominantes del inglés enfrentan apoyo institucional limitado, mayores tasas de rechazo y barreras adicionales de control y selección. La hegemonía del inglés como lengua franca de la investigación en educación matemática profundiza asimetrías (Meaney, 2013), amplificando los costos de traducción, edición y posibles sesgos de evaluación.

Las fronteras entre trabajo y vida, entre aprender y producir, entre demora reflexiva y entrega inmediata se desplazan. La optimización continua del yo académico opera según una lógica de start-up, iterando, pivotando y escalando. Sin embargo, aquí el capital en riesgo es la propia atención y energía corporal.

Los largos tiempos que requieren la innovación conceptual, algunas metodologías, como es el caso de la etnografía, y la transformación pedagógica, subordina a estas a la temporalidad de la publicación rápida y de las convocatorias inminentes. Se favorecen proyectos investigativos con resultados publicables por sobre la indagación abierta producto de los movimientos neoliberales de mercantilización que ha tenido la ciencia (Mendoza, 2020). La investigación se ajusta al largo del artículo en lugar de ajustar el artículo a la escala del problema. Los ciclos de financiamiento y los plazos de números especiales incentivan la fragmentación y las unidades mínimas publicables. De este modo, el tiempo para pensar, y para errar con profundidad, queda desplazado por trabajo de visibilidad.

El investigador aprende a performar su contribución mediante una gramática de señales. Reconoce un vacío explícito, calibra una declaración de contribución y empaqueta implicancias de manera prolija. No se niegan los beneficios de la claridad. Lo que se denuncia es su fetichización. Cuando la claridad se absolutiza como legibilidad métrica, la densidad teórica se disuelve y los contextos se aplanan. Lo situado, lo lento y lo conceptualmente espeso se sale del marco porque no rinde en indicadores, no encaja en formatos estandarizados y realiza su valor a través de procesos que no son inmediatamente contables.

¿Cómo interrumpir este circuito? No basta con negarse a publicar, porque ello implicaría abandonar el mismo territorio en el que todavía es posible disputar el poder. Más bien, es necesario repensar los criterios de valor, esto supone defender temporalidades largas y métodos que responden a su contexto temporal más que a una métrica, ampliar los foros de validación, incorporando comunidades, escuelas y todo aquel agente o institución involucrada, y no solo aquellos de circulación. En definitiva, sostener la densidad incluso cuando no es rentable. También implica visibilizar lo que la transparencia vuelve invisible, por ejemplo, el trabajo colectivo, el cuidado metodológico y la incertidumbre honesta.

PSEUDOCIERRE: UNA SEGUNDA LECTURA DESDE LA PSICOPOLÍTICA

Si este artículo parte preguntando para qué investigamos en educación matemática, la discusión sugiere que la respuesta no puede formularse al margen de las condiciones

temporales de (re)producción y circulación del conocimiento que atraviesan el campo. En particular, la publicación académica no opera únicamente como medio de difusión, sino como un dispositivo psicopolítico (Han, 2017) que organiza sensibilidades, regula prácticas y produce subjetividades investigadoras. Bajo un régimen de transparencia y visibilidad, la publicación se inscribe en una economía del desempeño que intensifica la autoexposición y reorienta el trabajo intelectual hacia lo medible y comparable. En este marco, la investigación en educación matemática corre el riesgo de asumir una visión instrumental de la publicación, como requisito externo o conducto neutral, omitiendo que es aquí donde se juegan los límites de lo posible hacer y decir, de la estructura de poder/conocimiento.

La pregunta para qué investigar en educación matemática no se resuelve con una declaración de principios, sino con la transformación de la regla de iteración que hoy gobierna qué se considera conocimiento, quién lo produce y bajo qué ritmos circula. Si no interrumpimos la relación entre impacto y visibilidad, el campo corre el riesgo de disolverse en una suma de datos, puntajes y perfiles que prometen un saber absoluto, pero empobrecen la capacidad de pensar y de sostener concepto. En cambio, si asumimos la (re)producción de conocimiento como espacio político en disputa, la investigación puede recuperar su orientación hacia problemas reales, su pluralidad epistémica y su potencia de transformación, incluso cuando esa potencia no sea inmediatamente contable.

Referencias

- Altbach, P. G., & de Wit, H. (2018). Too much academic research is being published. *International Higher Education*, 96, 2–3. <https://doi.org/10.6017/ihe.2019.96.10767>
- Artigue, M., & Kilpatrick, J. (2008). What Do We Know? And How Do We Know It? *Proceedings of the International Program Committee of ICME-11*, 1–25.
- Burchell, G., Gordon, C., & Miller, P. (1991). *The Foucault effect: Studies in governmentality*. The University of Chicago Press.
- Clavijo-Riveros, M. C., Fresneda-Patiño, E. P., & Galvis Bejarano, L. T. (2023). Rede de educadores matemáticos críticos: Possibilidades e desafios para a transformação das práticas matemáticas. *Prometeica - Revista de Filosofia e Ciências*, 27, 524–534. <https://doi.org/10.34024/prometeica.2023.27.15341>
- da Costa, B. C., da Costa Paes Jüren, B. D., Lima, J. O., & Magalhães, M. L. F. (2023). Educação matemática crítica e projetos de trabalho: Uma revisão sistemática de artigos publicados nos últimos 22 anos. *Prometeica - Revista de Filosofia e Ciências*, 27, 720–730. <https://doi.org/10.34024/prometeica.2023.27.15368>
- Darragh, L., Brodie, K., Halai, A., Planas, N., Potari, D., Santos-Trigo, M., Scheiner, T., & Walkoe, J. (2024). Publishing mathematics education research in English: Amplifying voices from the field. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 27(5), 857–878.
- Fardella, C., Marchant, D., & Baleriola, E. (2024). Métrica, subjetividad y meritocracia en el trabajo académico. *REICE. Revista Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 22(2), 51–66. <https://doi.org/10.15366/reice2024.22.2.003>

- Fardella-Cisternas, C., Carriel-Medina, K., Lazcano-Aranda, V., & Carvajal-Muñoz, F. I. (2020). Escribir papers bajo el régimen del management académico: Cuerpo, afectos y estrategias. *Athenea Digital. Revista de Pensamiento e Investigación Social*, 20(1), e-2252. <https://doi.org/10.5565/rev/athenea.2252>
- Fejes, A., & Nylander, E. (2017). The economy of publications and citations in educational research: What about the ‘Anglophone bias’? *Research in Education*, 99(1), 19–30. <https://doi.org/10.1177/0034523717740146>
- Foucault, M. (2009). *Nacimiento de la biopolítica: Curso del Collège de France (1978-1979)* (Vol. 283). Ediciones Akal.
- Fresneda-Patiño, E. P., & Sánchez Coral, G. J. (2023). Caracterizando nossas concepções de ser professor(a) de matemática: Relato de experiências situadas na educação matemática crítica e etnomatemática. *Prometeica - Revista de Filosofia e Ciências*, 27, 378–388. <https://doi.org/10.34024/prometeica.2023.27.15319>
- Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 37–68.
- Han, B. C. (2015a). *The burnout society*. Stanford University Press.
- Han, B. C. (2015b). *The transparency society*. Stanford University Press.
- Han, B. C. (2017). *Psychopolitics: Neoliberalism and new technologies of power*. Verso Books.
- Hsu, W.-C., Tsai, C.-F., & Li, J.-H. (2015). A hybrid indicator for journal ranking: An example from the field of Health Care Sciences and Services. *Online Information Review*, 39(7), 858–869.
- Inglis, M., & Foster, C. (2018). Five Decades of Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(4), 462–500. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.49.4.0462>
- Knepper, S., Stoneman, E., & Wyllie, R. (2024). *Byung-Chul Han: A critical introduction*. John Wiley & Sons.
- Lewis, J., Schneegans, S., & Straza, T. (2021). *UNESCO Science Report: The race against time for smarter development* (Vol. 2021). Unesco Publishing.
- Lorenzini, D., & Tiisala, T. (2024). The architectonic of Foucault’s critique. *European Journal of Philosophy*, 32(1), 114–129. <https://doi.org/10.1111/ejop.12877>
- Mancera-Ortiz, G., Camelo-Bustos, F. J., & Araújo, J. L. (2022). Paradigma crítico de investigación y modelación matemática: Transformaciones que desafían condiciones de vulnerabilidad social. *Revista Colombiana de Educación*, 86, 383–408. <https://doi.org/10.17227/rce.num86-12393>
- Meaney, T. (2013). The privileging of English in mathematics education research, just a necessary evil? In *Proceedings of the seventh international mathematics education and society conference* (pp. 65–84). Mathematics Education and Society.
- Mendoza, P. (2020). Autonomy and weak governments: Challenges to university quality in Latin America. *Higher Education*, 80(4), 719–737. <https://doi.org/10.1007/s10734-020-00511-8>
- Mills, S. (2004). *Discourse*. Routledge.

- Montecino, A. (2021). Investigación y producción de conocimiento en educación matemática: Una cuestión de mercado, poder y estética. *Revista Venezolana de Investigación En Educación Matemática*, 1(2), 1–20. <https://doi.org/10.54541/reviem.v1i2.20>
- Montecino, A. (2023). (Re)production of knowledge within mathematics education: An aesthetic and violence issues. *Prometeica - Journal of Philosophy and Science*, 27, 595–601. <https://doi.org/10.34024/prometeica.2023.27.15353>
- Navas, M. F., & Fuentes, A. Y. P. (2020). La situación de la investigación cualitativa en Educación: ¿Guerra de paradigmas de nuevo? *Márgenes*, 1(1), 45–68.
- Niss, M. (2019). The very multi-faceted nature of mathematics education research. *For the Learning of Mathematics*, 39(2), 2–7.
- Paterno, H. P., Luiz, K. F., Hang, L., & Cíviero, P. (2023). A educação de superdotados na educação matemática crítica: Discriminação ou inclusão? *Prometeica - Revista de Filosofia e Ciências*, 27, 731–740. <https://doi.org/10.34024/prometeica.2023.27.15371>
- Rodríguez, M. E. (2021). Las investigaciones transparadigmáticas en la Educación Matemática Decolonial Transcompleja. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 22(3), 698–725. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i3p698-725>
- Rose, N., O'malley, P., & Valverde, M. (2006). Governmentality. *Annu. Rev. Law Soc. Sci.*, 2(1), 83–104.
- Santos, A. L. F. C. dos, & Torisu, E. M. (2023). Temas contemporâneos transversais em uma perspectiva crítica: Professores em processo de empowerment. *EccoS – Revista Científica*, 66, e23656. <https://doi.org/10.5585/eccos.n66.23656>
- Silva, G. H. G. da, Marcone, R., Brião, G. F., & Kistemann Jr, M. A. (2020). Educação matemática crítica e preocupações urgentes: Cenários promovedores de equidade e justiça social. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 6(12), 130–157. <https://doi.org/10.33871/22385800.2017.6.12.130-157>
- Valero, P., Andrade-Molina, M., & Montecino, A. (2015). Lo político en la educación matemática: De la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 18(3), 7–20. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1830>

NADIE APRENDE SOLO: ACOMPAÑAMIENTO EN LA FORMACIÓN E INSERCIÓN PROFESIONAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA PARA CONSTRUIR CIUDADANÍA CRÍTICA Y REFLEXIVA EN EL SIGLO XXI

Carlos Vanegas-Ortega - cmariov@gmail.com
Universidad de Santiago de Chile

Abstract:

El profesorado de matemática atraviesa una crisis global que afecta su ingreso, permanencia y desarrollo profesional. Diversos informes internacionales advierten que el abandono docente ha aumentado de manera sostenida, especialmente en áreas de alta demanda, como la matemática (UNESCO, 2024). En Chile, las cifras del CIAE muestran que la deserción profesional se acerca al 5% anual, lo cual impacta directamente en los territorios más vulnerables. Frente a este escenario, resulta indispensable revisar cómo se conciben y se estructuran las prácticas de formación inicial y la inserción profesional, entendiendo que ningún docente debería transitar solo su aprendizaje. Esta conferencia presenta resultados de investigaciones desarrolladas en escuelas chilenas, en las cuales el acompañamiento se constituyó como categoría central para comprender el aprendizaje de la docencia. En estas experiencias participaron profesores en formación, docentes guías de las escuelas y académicos universitarios, configurando tríadas que analizaron clases reales, tomaron decisiones didácticas compartidas y reflexionaron sobre el sentido de la enseñanza de la matemática. Los resultados muestran que el acompañamiento favorece la permanencia, fortalece la identidad profesional y posibilita prácticas pedagógicas más inclusivas y críticas, capaces de vincular la matemática con el contexto social de los estudiantes. Finalmente, se proponen lineamientos para una educación matemática inclusiva que fortalezca la ciudadanía crítica, entendiendo el acompañamiento como una política de cuidado profesional capaz de disminuir la deserción, fortalecer la identidad docente y promover prácticas pedagógicas con sentido social.

Formación de profesores de matemática, acompañamiento, inserción profesional, educación matemática, reflexión docente.

INTRODUCCIÓN

La docencia, lejos de ser únicamente un oficio técnico o mecánico, es un campo profesional complejo donde convergen saberes, decisiones, emociones y responsabilidades éticas. Sin embargo, pese a su importancia, el profesorado —y en particular el profesorado de matemática— se ha convertido en una profesión en riesgo. La UNESCO (2024) advierte que hacia el año 2030 el mundo necesitará 44 millones de docentes adicionales para responder a la expansión de sistemas escolares y a la migración profesional hacia otros rubros. En Chile,

los informes del CIAE señalan que la deserción profesional se acerca al 5% anual y que esta cifra es aún más aguda en instituciones que atienden a comunidades vulnerables. Este fenómeno muestra que no basta con atraer nuevos estudiantes a las carreras de pedagogía: lo central es lograr que los docentes permanezcan, se desarrollen y encuentren sentido profesional en sus primeros años.

En este contexto, el acompañamiento de prácticas pedagógicas adquiere un rol decisivo. No se trata únicamente de supervisar, evaluar o corregir al profesor en formación, sino de generar condiciones de cuidado, escucha y reflexión que permitan construir identidad docente y estabilidad profesional. La evidencia recogida en diversas investigaciones (Vanegas-Ortega, 2016; Vanegas-Ortega, 2018; Tello y Vanegas-Ortega, 2021; Vanegas-Ortega y Fuentealba Jara, 2024; Martínez-Galaz et al., 2024) muestra que, cuando la universidad y la escuela trabajan en conjunto y sostienen vínculos pedagógicos, los profesores en formación desarrollan mayor seguridad, agencia didáctica, capacidad de toma de decisiones y apertura a prácticas inclusivas.

El lema de estas Jornadas —“Una educación matemática inclusiva para formar ciudadanos críticos y reflexivos para el siglo XXI”— obliga a mirar la formación de profesores más allá del dominio conceptual y procedimental. Una educación verdaderamente inclusiva requiere docentes que sean capaces de reconocer la diversidad, problematizar la realidad, modelar situaciones sociales y construir espacios donde la matemática habilite participación, lectura crítica del entorno y transformación cultural. Ese tránsito pedagógico no ocurre en soledad: ocurre cuando el docente se siente acompañado.

En ese sentido, esta conferencia apuesta por el desarrollo de un supuesto que impulsa una nueva epistemología de comprender la formación del profesorado y a los formadores: No hay inclusión ni ciudadanía crítica posible sin profesorado de matemática acompañado, visibilizado y sostenido colectivamente.

MARCO REFERENCIAL

El desarrollo profesional docente ha transitado, en la literatura internacional, desde una comprensión fragmentada de la formación como una etapa previa al ejercicio profesional, hacia una visión continua, situada y colaborativa del aprendizaje de la docencia (Darling-Hammond, 2017; Marcelo y Vaillant, 2017; Cochran-Smith y Lytle, 2009). Esta perspectiva resulta especialmente relevante para la educación matemática, pues permite comprender que la apropiación de la didáctica de la disciplina solo cobra sentido cuando se vive en escenarios reales y complejos, allí donde la enseñanza y el aprendizaje están atravesados por la incertidumbre, la toma de decisiones, las emociones, los conflictos y las desigualdades sociales. Por ello, acompañar al futuro profesor de matemática en contextos auténticos se convierte en una condición esencial para el desarrollo de su identidad profesional.

La construcción de la identidad docente involucra mucho más que el dominio de contenidos matemáticos. Incluye la capacidad de tomar decisiones, de otorgar sentido pedagógico a las experiencias, y de situarse emocionalmente frente al aula, a las instituciones escolares y a los estudiantes. Los estudios de Vanegas-Ortega (2016, 2018) han demostrado que la identidad profesional se fortalece cuando el profesor en formación no transita solo, sino cuando encuentra adultos significativos que legitiman, discuten, cuestionan y acompañan su proceso. En cambio, cuando el futuro profesor enfrenta la práctica sin acompañamiento, se activa una identidad frágil, muchas veces defensiva, sostenida en el miedo al error o la sanción.

El acompañamiento, entendido como categoría pedagógica de cuidado, transforma las prácticas de formación. No se trata de supervisar o corregir, sino de generar espacios dialógicos, tiempos protegidos para pensar la enseñanza, y contextos donde sea posible problematizar la matemática y su enseñanza. Desde esta perspectiva, la Mesa Reflexiva Tríadica (Vanegas-Ortega, 2016) representa un aporte metodológico sustantivo: al reunir en un mismo espacio al profesor en formación, al profesor de la escuela y al formador universitario, se favorece una reflexión más profunda, capaz de integrar voces y saberes que, usualmente, operan de forma aislada. Allí donde la reflexión ha sido históricamente una tarea individual y silenciosa, la tríada devuelve la reflexión a la conversación pedagógica, y, con ello, a la construcción colectiva de la profesión.

Este enfoque dialoga con los aportes de la educación matemática crítica (Skovsmose, 2012; Gutstein, 2006), que sostienen que la matemática no puede limitarse al entrenamiento procedimental ni a la repetición algorítmica. Una educación matemática inclusiva solo se vuelve posible cuando el conocimiento es conectado con la realidad de los estudiantes, cuando se formulan preguntas auténticas, cuando se modelizan fenómenos sociales, o cuando la argumentación se convierte en herramienta intelectual y ciudadana. Es precisamente en escenarios acompañados donde los profesores en formación se atreven a explorar nuevas estrategias, tensionar sus concepciones previas y construir prácticas didácticas que respondan a la diversidad del aula. Sin acompañamiento, la matemática se reduce al ejercicio mecánico; con acompañamiento, se abre a la reflexión, la interpretación y la ciudadanía.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Las investigaciones que dan sustento a esta conferencia se desarrollaron desde una perspectiva cualitativa y experiencial, con énfasis en el acompañamiento de prácticas pedagógicas de matemática y en el acompañamiento a la inserción profesional docente. El núcleo metodológico estuvo constituido por el trabajo sistemático con tríadas formativas, integradas por el profesor en formación, el profesor guía de la escuela y el profesor tutor de la universidad. A diferencia de esquemas tradicionales de supervisión —donde el tutor universitario “visita” y emite un juicio—, aquí las tríadas funcionaron como comunidades pedagógicas que se reunían de manera periódica, analizaban videos de clases, revisaban

planificaciones, leían diarios reflexivos y discutían dificultades reales del aula. Este trabajo se desarrolló en más de veinte escuelas de enseñanza básica y media, ubicadas en contextos urbanos y semi-rurales, y permitió observar cómo las decisiones pedagógicas se tomaban en interacción, no en soledad.

En paralelo, se acompañaron directamente clases reales de matemática —álgebra, geometría, estadística y razonamiento proporcional— con el fin de caracterizar las decisiones que los profesores en formación toman al enseñar en aulas heterogéneas. Estas observaciones mostraron que muchos de ellos dominaban el contenido, pero no contaban con herramientas didácticas y emocionales para sostener la diversidad de ritmos, intereses y experiencias de los estudiantes. La presencia del acompañamiento modificó esta situación, ya que permitía detener la clase, mirar lo ocurrido, analizar alternativas y ensayar nuevas decisiones.

Otra línea metodológica relevante entrega insumos para defender el supuesto de esta conferencia, fue el self-study interinstitucional (Martínez-Galaz, Henríquez-Rivas, Climent-Rodríguez, Vanegas-Ortega y Mejía, 2024), en el cual formadores de profesores de distintas universidades analizaron grabaciones de sus propias clases. Allí se observó que el acompañamiento no consiste en decir qué está bien o mal, sino en formular preguntas que profundicen la práctica y en ofrecer valoraciones significativas que reconozcan el esfuerzo profesional. El acompañamiento, incluso en el ámbito universitario, se volvió una experiencia de aprendizaje situada.

Finalmente, se utilizan los resultados de un estudio nacional desarrollado durante la pandemia (Vanegas-Ortega y Fuentealba Jara, 2024), que permitió indagar cómo las instituciones de formación inicial enfrentaron la ruptura de la presencialidad en las prácticas pedagógicas. Este estudio registró tensiones estructurales: algunas universidades perdieron contacto con las escuelas; otras lograron sostener las prácticas mediante acompañamiento remoto; en algunos casos, la tríada existía solo como “declaración institucional”, mientras que en otros operaba como dispositivo real de apoyo. La pandemia, en cierto sentido, funcionó como un experimento involuntario que evidenció qué programas tenían vínculos pedagógicos sólidos con las escuelas y cuáles se sostenían en acuerdos formales, pero frágiles.

RESULTADO PARA PENSAR EN NUEVAS IDEAS

Los resultados muestran que la calidad del acompañamiento define la calidad de la práctica pedagógica. Cuando el acompañamiento es sistemático y dialógico, los profesores en formación se sienten parte de la escuela, toman decisiones pedagógicas con mayor seguridad, y transforman su conocimiento matemático en propuestas didácticas adaptadas a estudiantes reales. En cambio, cuando el acompañamiento desaparece, la práctica se convierte en una experiencia solitaria, muchas veces punitiva, donde el error se vive como fracaso personal y no como oportunidad de aprendizaje.

Del mismo modo, la tríada se consolida como un espacio en el que todos aprenden. El profesor en formación escucha la voz de la escuela; el profesor guía escucha los fundamentos teóricos y didácticos que aporta la universidad; el tutor universitario comprende la complejidad del aula real. Allí donde la formación suele dividir funciones —la universidad “enseña teoría” y la escuela “presta la sala”—, la tríada las vincula en una misma conversación didáctico-pedagógica.

En el estudio realizado por Tello y Vanegas-Ortega (2021), se analizaron experiencias de acompañamiento de prácticas de estudiantes de pedagogía en matemática en liceos de contextos vulnerables. Una de las estudiantes participantes —que llamaremos “Camila”— relató que, durante sus primeras clases, experimentó la sensación de “*controlar una máquina desordenada*”, donde los estudiantes no parecían interesados y la matemática se volvía una secuencia de instrucciones que nadie tomaba en serio. Ante esa experiencia inicial, la profesora guía del colegio le propuso revisar un fragmento de la clase en conjunto con el tutor universitario. La tríada observó un momento específico: Camila había planteado una pregunta abierta sobre proporcionalidad, pero, al ver que algunos estudiantes demoraban en contestar, volvió a explicar el procedimiento paso a paso y pidió copiar la respuesta del cuaderno.

En la conversación posterior, la profesora guía le preguntó qué había pensado en ese instante. Camila respondió: “*Me asusté. Sentí que si preguntaba demasiado se me iba a desordenar la clase*”. El tutor universitario agregó una observación clave: la pregunta había sido buena, pero el tiempo de espera fue demasiado breve para que los estudiantes pudieran pensar. El grupo decidió intentar una nueva estrategia: mantener la pregunta abierta, registrar las ideas de los estudiantes en la pizarra, y comparar diferentes formas de razonar.

Una semana después, Camila volvió a trabajar la misma idea, ahora con el acompañamiento presente. En esta ocasión, tres estudiantes dieron respuestas distintas, uno de ellos incluso usando un razonamiento personal que nunca había sido enseñado formalmente. La clase terminó con una discusión breve en la que el curso buscó qué tenían en común las soluciones. Al finalizar, Camila escribió en su bitácora: “*Me di cuenta de que no pierdo autoridad cuando los dejo pensar. De hecho, la clase se ordenó más. Me escucharon porque sentí que yo también los estaba escuchando*” (Tello y Vanegas-Ortega, 2021, p. 8).

Este registro, pequeño en apariencia, ilustra una transformación profunda. El acompañamiento no consistió en corregir o evaluar, sino en brindar tiempo, contención y pensamiento pedagógico conjunto. La profesora en formación pasó de una identidad centrada en “controlar la clase” a una identidad más dialogante y confiada en la capacidad matemática de los estudiantes. La matemática dejó de ser una receta y se convirtió en una interacción. Sin acompañamiento, esa transformación no habría ocurrido.

Este caso no es un predictor de lo que puede estar pasando con el funcionamiento de las tríadas a nivel nacional. Durante la pandemia, Vanegas-Ortega y Fuentealba Jara (2024) realizaron un estudio en 23 universidades chilenas con trayectoria en formación inicial docente. Se entrevistaron tutores universitarios, profesores guías y estudiantes en práctica para caracterizar cómo funcionaron las tríadas de acompañamiento cuando los establecimientos educacionales cerraron.

Los resultados mostraron una fractura significativa en el sistema formativo.

- En 14 de las 23 universidades, los vínculos con las escuelas se debilitaron drásticamente: algunos establecimientos no respondieron los correos, otros no tenían conectividad y varias universidades suspendieron sus prácticas sin ofrecer actividades alternativas de acompañamiento. En esos casos, la tríada existió solo como categoría declarativa: no había coordinación entre universidad, escuela y estudiante.
- En contraste, 9 universidades lograron sostener prácticas remotas con acompañamiento, utilizando grabaciones de clases online, análisis de foros de interacción, diseño de materiales digitales y tutorías sincrónicas. En estas instituciones, el acompañamiento se reconfiguró, pero no desapareció.

Un tutor universitario entrevistado explicó: *“Nos dimos cuenta de que nunca fue la presencialidad lo que hacía funcionar la tríada. Era la relación”* (Vanegas-Ortega y Fuentealba Jara, 2024, p. 13).

Una de las conclusiones más llamativas del estudio fue que, aun en pandemia, los estudiantes que recibieron acompañamiento reportaron haber aprendido a gestionar el aula virtual, adaptar explicaciones, usar herramientas interactivas y sostener el vínculo pedagógico con los estudiantes. Por el contrario, quienes quedaron sin acompañamiento describieron su práctica como “un vacío”, “una suspensión de la formación” o “un año perdido”.

El estudio evidenció algo fundamental para las políticas públicas: no es la práctica en sí la que forma, sino el acompañamiento. Cuando la práctica se realiza sin acompañamiento, se transforma en simulacro; cuando la práctica se realiza con acompañamiento, incluso en condiciones críticas, se transforma en aprendizaje profesional.

Por otro lado, los resultados también evidencian que el acompañamiento en los primeros años de inserción profesional disminuye la sensación de soledad, reduce la tendencia al abandono y permite sostener emocionalmente al joven docente. En educación matemática, donde la presión evaluativa suele ser alta, el acompañamiento se vuelve un requisito de justicia laboral y pedagógica: quien ingresa al sistema necesita que alguien legitime sus decisiones, celebre sus aciertos, y analice con él sus dificultades. Sin acompañamiento, muchos profesores noveles se refugian en modelos transmisivos; con acompañamiento, se atreven a explorar

prácticas inclusivas, a formular preguntas abiertas, a conectar la matemática con el contexto social y a reconocer la diversidad de sus estudiantes.

Un caso documentado durante la investigación permite clarificar este proceso. “Luis”, profesor novel de matemáticas en un establecimiento público urbano, asumió sus primeras clases en primer año de enseñanza media. Durante la entrevista inicial señaló sentirse “*al borde de la renuncia*” debido a la presión institucional por los resultados y a la percepción de no estar “a la altura de un profesor titular”. Su práctica se caracterizaba por la exposición continua del contenido seguido de ejercicios individuales, lo que él interpretaba como la forma más segura de “*mantener el control*”. Sin embargo, los bajos resultados de las primeras evaluaciones y los frecuentes episodios de desinterés en la sala incrementaron su sensación de fracaso personal.

A partir de esta situación, el jefe de la unidad técnico-pedagógica decidió acompañarlo durante un período de seis semanas. Le solicitó que seleccionara una clase donde quisiera apoyo y juntos revisaron la planificación y los objetivos. La actividad seleccionada trataba sobre el razonamiento proporcional. En vez de preparar una explicación magistral, se propuso presentar un problema anclado en el contexto del transporte público del barrio, de modo que los estudiantes pudieran estimar valores, comparar estrategias y justificar sus respuestas. La clase fue observada y grabada. Posteriormente revisaron un fragmento específico: cuando uno de los estudiantes ofreció una solución inesperada, Luis estuvo a punto de corregirlo, pero optó por pedir una justificación. Esta decisión abrió una conversación en la que emergieron distintas formas de razonar.

En la conversación posterior con su acompañante, Luis relató que este momento había sido decisivo. Señaló que, en sus palabras, “*aceptar la incertidumbre*” fue posible porque sentía que no estaba solo y que, si algo no resultaba, tendría la oportunidad de analizarlo sin ser sancionado. A partir de esa experiencia, comenzó a incorporar con mayor frecuencia preguntas abiertas, problemas contextualizados y momentos de discusión colectiva. En los dos meses siguientes, la participación de los estudiantes aumentó significativamente y él mismas expresó sentirse “*menos vigilado y más profesor*”. Según su propio registro de acompañamiento: “*Cuando entendí que escuchar no me quitaba autoridad, sino que me la daba, sentí que pertenecía a este lugar.*”

Este caso refleja que el acompañamiento no solo tiene efectos en la dimensión pedagógica, sino también en la emocional y ética del ejercicio profesional. Luis no modificó su práctica porque se le entregó una pauta, sino porque se sintió legitimado para experimentar y pensar la matemática como construcción colectiva. Por ello, los datos permiten afirmar que el acompañamiento es una condición estructural del ejercicio docente, especialmente en los primeros años, cuando las tensiones y transiciones identitarias son mayores (Vanegas-Ortega, 2024). Allí donde existe acompañamiento, los profesores noveles se reconocen capaces,

sostienen su permanencia y encuentran sentido en la enseñanza de la matemática; donde no existe, la docencia se vuelve supervivencia.

Los resultados expuestos permiten afirmar que el acompañamiento constituye una condición estructural del proceso formativo, y no un añadido optativo. Allí donde las instituciones de formación inicial, las escuelas y los propios profesores noveles logran sostener vínculos pedagógicos, la transición desde la identidad estudiantil hacia la identidad docente adquiere mayor solidez y sentido profesional. En cambio, cuando la práctica queda reducida a una experiencia individual o meramente evaluativa —sin escucha, sin diálogo, sin reflexión y sin presencia adulta significativa—, los futuros profesores de matemática experimentan soledad pedagógica, temor a la equivocación y dificultades para vincular la disciplina con la diversidad real de los estudiantes.

A la luz de las investigaciones revisadas, es posible sostener que el acompañamiento transforma la enseñanza de la matemática en un proceso situado y ético. No solo promueve el desarrollo de competencias didácticas, sino también un posicionamiento profesional que reconoce la complejidad del aula y la legitimidad de los estudiantes como sujetos de conocimiento. De este modo, el acompañamiento actúa como una política de cuidado profesional: protege la permanencia, previene el abandono, fortalece la agencia y habilita prácticas más inclusivas, críticas y sensibles al contexto.

Asimismo, las experiencias de tríadas formativas, mesas reflexivas y acompañamiento a la inserción profesional muestran que la docencia deja de ser una responsabilidad individual para convertirse en una tarea compartida. La universidad deja de observar desde la distancia; la escuela deja de ser un espacio que solo recibe estudiantes en práctica; y el profesor novel deja de ser un aprendiz aislado. En esa confluencia de miradas surge una profesión más dialogada, menos jerárquica y más abierta a la reflexión pedagógica.

CONCLUSIONES PARA SEGUIR PENSANDO EN NUEVAS IDEAS

En síntesis, si Chile aspira a una educación matemática inclusiva, capaz de formar ciudadanos críticos para el siglo XXI, debe reconocer que ningún docente —ni en formación, ni en sus primeros años— debería habitar la profesión en soledad. El acompañamiento es la vía para transformar lo que ocurre en el aula, pero también para transformar lo que ocurre en quienes enseñan. Allí se fundan las posibilidades de permanencia, bienestar profesional, innovación didáctica y justicia educativa.

Para avanzar en esta dirección, es necesario comprender que la política educativa no puede limitarse a ampliar el número de futuros docentes, ni a diagnosticar la falta de especialistas en matemática. El desafío principal consiste en garantizar condiciones de acompañamiento sostenido durante la formación inicial y la inserción profesional. Ello requiere que las universidades aseguren vínculos reales con escuelas y liceos, no solo convenios formales.

Cuando la formación inicial está conectada con el territorio escolar, los estudiantes se insertan desde temprano en comunidades docentes, aprenden a leer la diversidad de aulas chilenas y desarrollan una sensibilidad profesional que no se construye desde la teoría aislada (traída del norte global o construida desde un objeto matemático desconectado de quien enseña, de quien aprende y sus contextos socioculturales).

Del mismo modo, las prácticas pedagógicas no pueden seguir siendo espacios episódicos de observación o ejecución aislada de clases. Deben convertirse en experiencias prolongadas, sistemáticas y acompañadas, donde el futuro profesor pueda detenerse a pensar lo que hace, analizar lo que sus estudiantes comunican, y reorientar sus decisiones didácticas con fundamento y con apoyo. Allí donde las tríadas formativas funcionan con regularidad, el conocimiento didáctico ya no se transmite verticalmente, sino que se co-construye entre universidad y escuela. En ese diálogo interinstitucional se activan nuevas formas de enseñar matemática, más cercanas a la realidad del aula, más respetuosas de la diversidad y más comprometidas con el aprendizaje de todos y todas.

Con relación a la inserción profesional, resulta imprescindible que los primeros años de ejercicio estén acompañados por equipos docentes que reconozcan la complejidad emocional de este período. El profesorado novel necesita espacios protegidos para compartir sus dudas, revisar sus clases, analizar casos difíciles y recibir retroalimentación pedagógica. Cuando esto ocurre, la docencia deja de vivirse como una prueba individual de resistencia; se convierte en un proceso donde el docente descubre que es posible equivocarse, volver sobre sus decisiones y crear formas más justas de enseñar matemática. En ese acompañamiento descansa la posibilidad de que la matemática no sea solo una disciplina evaluativa, sino también una herramienta para comprender la sociedad, cuestionar sus desigualdades y formar ciudadanía crítica.

Finalmente, es necesario reconocer que el acompañamiento no solo beneficia al futuro profesor, sino también a los estudiantes de las escuelas. Cuando un profesor en formación es escuchado, apoyado y legitimado, se atreve a proponer actividades más abiertas, preguntas más profundas y vínculos más significativos con el aprendizaje matemático. De esta manera, la sala de clases se convierte en un espacio donde los estudiantes no solo calculan, sino que interpretan, argumentan, modelan e imaginan. Se hace visible que la matemática puede hablar sobre su barrio, sus problemas, sus aspiraciones y sus derechos. Si la inclusión se expresa en la participación de todos, la ciudadanía crítica se expresa en la posibilidad de pensar el mundo con herramientas matemáticas.

En conclusión, el camino para una educación matemática inclusiva no pasa únicamente por rediseñar currículos ni por exigir más horas de práctica. Pasa, ante todo, por acompañar humanamente a quienes enseñan. Si la escuela es un espacio donde se aprende con otros, la formación docente también debe serlo. La matemática que necesitamos para el siglo XXI

será más justa y más crítica si quienes la enseñan han sido también acompañados en su propio aprendizaje profesional.

Referencias

- Cochran-Smith, M., y Lytle, S. (2009). *Inquiry as stance: Practitioner research for the next generation*. Teachers College Press.
- Darling-Hammond, L. (2017). Teacher education around the world: What we know and how we can improve. *European Journal of Teacher Education*, 40(3), 291–309.
- Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics*. Routledge.
- Marcelo, C., y Vaillant, D. (2017). *Desarrollo profesional docente: Cómo se aprende a enseñar*. Narcea.
- Martínez-Galaz, C., Henríquez-Rivas, C., Climent-Rodríguez, N., Vanegas-Ortega, C., y Mejía-Aristizabal, L. (2024). Reflexión colaborativa de didáctas basada en un self-study interinstitucional. *Cadernos de Pesquisa*.
- Skovsmose, O. (2012). *An invitation to critical mathematics education*. Springer.
- Tello, D., y Vanegas-Ortega, C. (2021). *Formación inicial de profesores de matemática: experiencias enriquecedoras y contraproducentes durante el acompañamiento de prácticas*.
- UNESCO. (2024). *Global report on teachers: Addressing teacher shortages and transforming the profession*.
- Vanegas-Ortega, C. (2016). *Mesa reflexiva triádica: Fundamentos y protocolos para el estudio de la reflexión en prácticas pedagógicas*.
- Vanegas-Ortega, C. (2018). *Reflexión docente: Perspectivas teóricas y modelos para el desarrollo profesional de profesores*. Appris.
- Vanegas-Ortega, C., y Fuentealba Jara, R. (2024). Teacher education during the COVID-19 pandemic: Tensions and challenges of initial teacher training practices. *Education Sciences*, 14(7).

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA INCLUSIVA COMO EJE DE TRANSFORMACIÓN EN LA FORMACION DEL PROFESORADO

Carmen Cecilia Espinoza Melo - cespinozame@ucsc.cl
Universidad Católica de la Santísima Concepción

Abstract

En la actualidad, tanto docentes como futuros docentes, somos conscientes de la cantidad de estudiantado diverso con el que nos podemos encontrar dentro de un establecimiento educativo, por lo cual se entiende que deberíamos contar con las herramientas y habilidades necesarias para así atender las diferencias y necesidades que un estudiante presente durante su proceso de aprendizaje.

El futuro profesorado, se enfrenta con el desafío de promover los aprendizajes de la totalidad del estudiantado, es decir, entregar las mismas oportunidades educativas reconociendo sus diferencias individuales. Además, debido a las exigencias del marco normativo del Ministerio de Educación de Chile el cual mandata acoger a los itinerarios formativos temas transversales como lo es el paradigma de la Matemática Inclusiva.

Inclusión educativa, didáctica, formación inicial del profesorado, matemática inclusiva.

INTRODUCCIÓN

Desde el planteamiento de Salamanca en el año 1994 a la actualidad la inclusión educativa es considerada un base rector que orienta las políticas y prácticas educativas de todo el estudiantado que se encuentran en el aula y, por tanto, del sistema educativo, dejando en claro que no se refiere ni restringe al estudiantado con Necesidades Educativas Especiales (NEE) aunque obviamente los incluye (Duck y Murillo, 2018). Por consiguiente, se considera relevante el conceder una singular validez a la idoneidad docente en su progreso profesional para beneficiar la inclusión educativa (Marchesi y Hernández, 2019). En Chile, al igual que en diversos países, se han impulsado diversas políticas públicas relativa a educación inclusiva que han sugerido nuevas formas de cómo el profesorado debe proporcionar los apoyos para el logro del aprendizaje y la participación (Muñoz et al., 2015). Sin embargo, esto no ha significado una transformación de los programas de estudio de pedagogía, que, por su nivel de autonomía y línea de mercado, han respondido relativamente a la inclusión educativa en la formación (San Martín et al., 2017).

En los escenarios laborales que enfrentará este profesorado encontrará una gran diversidad, alumnado con distintas maneras de aprender, formas de relacionarse con los demás y ritmos de aprendizaje. Por lo anterior es necesario que el profesorado de matemática en formación

adquiera diversas estrategias, percepciones, reflexión sobre su práctica, experiencias y conocimientos para dar los apoyos a todo el estudiantado y favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje, de tal manera, que puedan sentirse preparados para entregar una educación de calidad a todos y todas.

Algunos autores advierten que desde las políticas educativas se ha forzado a las universidades donde se forman docentes para producir respuestas precisas a la diversidad del alumnado, la totalidad de los programas de educación superior para futuros profesores introduce herramientas a nivel de metodologías y didácticas que se centran en el aprendizaje del alumno promedio, sin reflexionar sobre la diversidad del estudiantado (infante, 2010; Infante y Matus, 2009, Tenorio, 2011)

La formación del profesorado de matemática actualmente se encuentra con importantes desafíos por las demandas de las políticas públicas, es por este motivo que se necesita incluir nuevos paradigmas y temáticas transversales en la formación inicial de estos. El monumentalismo, que aún se sigue utilizando en las aulas universitarias, enfatiza la memorización de los contenidos y el trabajo individual. En la mayoría de estas se continúa realizando clases de forma tradicional, donde, quien posee el conocimiento es el profesor y los estudiantes son receptores pasivos. En este sentido, existen evidencias que ponen de manifiesto que la repetición de los contenidos no ayuda al alumnado a su comprensión (Alsina y Franco, 2020).

En las aulas actualmente encontramos una gran diversidad del alumnado con diferentes maneras de acceder e interpretar la información, distintas formas de relacionarse con los demás y distintos ritmos de aprendizaje (Alsina y Franco, 2020). Por lo anterior, es necesario que los futuros profesores en su formación inicial adquieran diversas estrategias, percepciones, experiencias y conocimientos para intentar dar respuestas a las múltiples interrogantes del proceso de enseñar y aprender que se presentan cada día y al cual deberán enfrentarse, de tal manera que puedan estar preparados para entregar una educación de calidad a todos los estudiantes del salón de clases, independiente de su condición social, étnica, discapacidad o lengua. Se entiende que un estudiante presenta necesidades educativas especiales cuando, con o sin discapacidad, presenta dificultades el acceso a contenidos curriculares en la interacción con su contexto escolar (Castro y Torres, 2017).

Los continuos cambios sociales que se están produciendo, tales como: la globalización, el incremento de flujo migratorio, el vivir en una sociedad con personas que presentan diversas necesidades, donde lo diferente se hace cotidiano y normal, demanda una nueva visión en la función social y rol docente que debe estar presente en su formación inicial de estos profesores (Maestre et al., 2017). Los profesores, se enfrenta con el desafío de promover los aprendizajes de la totalidad del estudiantado, es decir, entregar las mismas oportunidades educativas reconociendo sus diferencias individuales (Aké et al., 2021). Además, debido a

las exigencias del marco normativo del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) el cual mandata acoger a los itinerarios formativos temas transversales como lo es el paradigma de la inclusión educativa.

Factores que limitan la inclusión educativa.

El avance en la inclusión educativa se ha limitado, ya que nos hemos encontrado con normas sociales que son a menudo el mayor obstáculo para ésta, las cuales tardan tiempo en quedar fuera de circulación y muchas todavía resisten a la incorporación de estudiantado con discapacidad y problemas de aprendizaje, así como los de las culturas minoritarias para que éstas puedan estar en el aula.

La capacidad de respuesta inclusiva de los centros no mejora, lo que aumenta es la proliferación de normas, medidas, dispositivos y centros especiales, más o menos segregadores y excluyentes; para *atender a la diversidad*, como eufemísticamente se denominan (Echeita,2017).

Para poder progresar en la implementación de la educación inclusiva se deben eliminar las prácticas de segregación dirigidas principalmente al estudiantado que presentan problemas de aprendizaje o físicos, también encontramos barreras físicas en la estructura de las escuelas, ya que no tienen instalaciones adecuadas para todos y todas.

Se puede observar que los planes de estudio entregados por el ministerio de educación siguen siendo muy rígidos, lo cual no permite la experimentación o al uso de diferentes métodos de enseñanza en las instituciones educativas. El estudiantado no tiene injerencia en éstos ya que no es considerada su opinión, relativo a que quieren aprender o que les interesa, la preocupación central del profesorado es darle cumplimiento total al currículum que corresponde ver por nivel.

Para que la inclusión educativa pueda avanzar se requiere de un cambio de postura de las instituciones, por ejemplo, que apoyen al profesorado que requieren perfeccionarse en temas de inclusión educativa y didáctica, ya que esto beneficiará el aprendizaje de todos los estudiantes.

Papel de la formación de profesores de aula para el desarrollo de la inclusión.

Olmos et al. (2016) nos señalan que:

La práctica docente en la universidad también se ha complicado demandando reflexiones y propuestas de cambio en la formación del profesor en múltiples dimensiones y escenarios, uno de los cuales implica responder al desafío de atender a la diversidad tanto estudiantil como de la cultura académica universitaria (p.230)

El profesorado que estará en las aulas inclusivas debe incorporar una variedad de métodos de enseñanza con el fin de cubrir desde su especialidad todas o la mayoría de las capacidades de aprendizaje del estudiantado. Esto puede ser beneficioso para todo el alumnado, ya que permite aumentar su participación en el proceso de enseñanza aprendizaje, un mayor compromiso por parte de ellos y protagonismo.

Al respecto Slee (2001), cuando hace referencia a las prácticas inclusivas, destaca la necesidad de que los futuros docentes y los formadores de estos tengan la posibilidad de comprender sus propias nociones de inclusión para construir espacio de posibilidades distintos que no refuercen las debilidades tradicionalmente visibilizadas de los grupos minoritarios en la escuela (Infante, 2010).

En síntesis, el formar profesorado de aula con conocimiento en inclusión es todo un reto, ya que las universidades deberían realizar modificaciones en los planes de estudios de las pedagogías donde se hiciera énfasis en contenidos transversales de inclusión y atención a la diversidad, y además ofertaran cursos de asignaturas complementarias en esta temática, pero lo más importante es que se logre entender que todos y todos los futuros docentes deben tener formación en inclusión o inclusión educativa.

CONCLUSIÓN

Los resultados de esta investigación evidencian que las universidades realizan esfuerzos por integrar los principios de la inclusión en sus procesos formativos. Aunque los planes de estudio incorporan estos elementos en el plano discursivo, persiste una limitada articulación entre dichos principios y su implementación sistemática en el currículum. Esta relación se manifiesta en declaraciones institucionales y en ciertas actividades curriculares; sin embargo, de manera general, se observa una insuficiente transversalización del enfoque inclusivo en la formación pedagógica y disciplinar. Esta brecha podría incidir en el desarrollo de competencias esenciales para abordar la diversidad en distintos contextos educativos, evidenciando que el compromiso con la inclusión, presente a nivel declarativo, no se traduce plenamente en prácticas curriculares que preparen adecuadamente a los futuros docentes para los desafíos del aula.

A partir de los análisis realizados, se reconoce la necesidad de emprender una revisión crítica de los planes de estudio de pedagogía, con el fin de fortalecer la inclusión como principio formativo estructurante en la formación inicial docente. Si bien se valoran las acciones puntuales y actividades curriculares orientadas a este propósito, se espera que la actualización de los programas derive en una convergencia de enfoques pedagógicos coherentes con la educación inclusiva. Esto implica proyectar la creación de ambientes inclusivos, promover metodologías diversificadas, asegurar procesos evaluativos orientados a la equidad y fomentar una ética profesional comprometida con la justicia social. Desde esta perspectiva,

el desarrollo profesional docente se orienta a consolidar comunidades de aprendizaje inclusivas y a promover una educación equitativa.

Referencias

- Alsina, Á. y Franco, J. (2020). Promoviendo la educación matemática inclusiva desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: el caso de las fracciones. *APeDuC Journal: Research and Practices in Science, Mathematics and Technology Education*, 1(2), 13-29.
- Aké-Tec, L., Hernández, J., Ordaz-Arjona, M., Larios, J. y Parada, S. (2021). Formación de profesores de matemáticas: avances para promover aulas de matemáticas inclusivas. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 6. <https://www.revistaiime.org/index.php/IIME/article/view/105>
- Castro, C. y Torres, E. (2017). La educación matemática inclusiva: una experiencia en la formación de estudiantes para profesor. *Revista Infancias Imágenes*, 16(2), 295-304. <https://doi.org/10.14483/16579089.9953>
- Duk, C. y Murillo, F. (2018). El Mensaje de la Educación Inclusiva es Simple, pero su Puesta en Práctica es Compleja. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, 12(1), 11-13. <https://doi.org/10.4067/S0718-73782018000100011>
- Echeita Sarrionandia, G. (2017). Educación inclusiva. Sonrisas y lágrimas. *Aula Abierta*, 46(2), 17-24. Disponible en : <https://doi.org/10.17811/rifie.46.2.2017.17-24>
- Infante, M. (2010). Desafíos a la formación docente: inclusión educativa. *Estudios Pedagógicos*, 36(1), 287- 297. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052010000100016>
- Infante, M. y Matus, C. (2009). Policies and practices on diversity: Reimagining possibilities for new discourses. *Disability and Society*, 24(4), 437-445. <http://dx.doi.org/10.1080/09687590902879049>
- Maestre M., Nail, O. y Rodríguez-Hidalgo, A. (2017). Desarrollo de competencias tic y para la educación inclusiva en la formación inicial práctica del profesorado. *Bordón: Revista De Pedagogía*, 69(3),57-72. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2017.51110>
- Marchesi, Á. y Hernández, L. (2019). Cinco Dimensiones Claves para Avanzar en la Inclusión Educativa en Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, 13(2), 45-56. <https://doi.org/10.4067/S0718-73782019000200045>
- Muñoz, M., López, M., y Assaél, J., Concepciones docentes para responder a la diversidad: ¿Barreras o recursos para la inclusión educativa?, <https://doi.org/10.5027>, *Psicoperspectivas*, 14(3), 68-79 (2015)
- Olmos, A, Romo M. R. y. Arias L. M. C (2016). Reflexiones Docentes sobre Inclusión Educativa. Relatos de Experiencia Pedagógica sobre la Diversidad Universitaria. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*10(1), 229-243 Disponible en : <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-73782016000100012>
- San Martín, C., Villalobos, C., Muñoz, C. y Wyman, I. (2017) Formación inicial docente para la educación inclusiva. Análisis de tres programas chilenos de pedagogía en educación básica que incorporan la perspectiva de la educación inclusiva. *Calidad en la Educación*, (46), 20-52. <http://doi.org/10.4067/S0718-45652017000100020>

Slee, R. (2001). 'Inclusion in Practice': does practice make perfect?. *Educational review*, 53(2), 113-123. <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00131910120055543>

Tenorio, S. (2011). Formación inicial docente y necesidades educativas especiales. *Estudios Pedagógicos*, 37(2), 249-267. <http://dx.doi.org/10.4067/s0718-07052011000200015>

TRABAJO MATEMÁTICO DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN GEOMETRÍA: HALLAZGOS Y DESAFÍOS PARA LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

Carolina Henríquez Rivas - chenriquezr@ucm.cl
Universidad Católica del Maule

Abstract:

La investigación internacional en el ámbito de la educación en geometría es variada y extensa. En particular en Chile, se trata de un dominio matemático que requiere ser estudiado y atendido. Para ello, la formación inicial docente (FID) debe considerar experiencias de enseñanza reales que permitan llevar el discurso teórico a la práctica en el ámbito de la didáctica disciplinar. En la presente comunicación se presentan algunos hallazgos obtenidos en el marco de un proyecto de investigación (Fondecyt de Iniciación N° 11230523). El estudio busca conectar un modelo teórico existente de la Didáctica de la Matemática, con la evidencia empírica de la práctica matemática en el aula de educación secundaria en el dominio de geometría y su transferencia a la FID de matemática. La investigación se sustenta en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), que permite analizar en profundidad su práctica docente, tanto en una perspectiva de enseñanza, como investigativa, con base en aspectos epistemológicos y cognitivos del trabajo matemático. El marco metodológico se aborda desde un enfoque mixto, cuyo modelo dominante es cualitativo. El proyecto desarrollado en tres años, considera 3 fases investigativas, la primera es cuantitativa y, posteriormente, las dos fases siguientes se abordan desde el enfoque cualitativo. Finalmente, se espera contribuir a la FID e impactar en la formación del profesorado, mediante propuestas y orientaciones para la enseñanza.

Espacios de Trabajo Matemático, Geometría, Formación Inicial Docente, Profesor,
Educación Secundaria.

INTRODUCCIÓN

La presente comunicación se enfoca en mostrar hallazgos obtenidos en el marco de un proyecto financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID) Fondecyt de Iniciación, el cual se encuentra en su etapa final de desarrollo. Este proyecto se focaliza en el dominio de geometría, con atención en la formación inicial docente y la práctica matemática en el aula del profesorado de educación secundaria. En general, se pretende aportar a la comunidad de investigadores, formadores de profesores y profesores en servicio y a la toma de decisiones sobre la enseñanza de tópicos en geometría, con especial atención en la formación inicial docente.

La investigación sobre educación en geometría es variada y extensa (e.g., Almubarak et al., 2025; Herbst et al., 2018). En las últimas décadas, diversos estudios en educación en geometría se han sustentado en perspectivas teóricas diferentes, poniendo atención en aspectos, tópicos y niveles diversos (e.g., Flores Salazar et al., 2025; Henríquez-Rivas y Kuzniak, 2021, Lagrange y Richard, 2022). De este modo, en investigaciones recientes se destaca la importancia de analizar el trabajo geométrico del profesorado, con atención al profesor en servicio y el profesor en formación inicial (e.g., Kuzniak y Nechache, 2021; Zakaryan y Soza, 2021). Por ejemplo, Tachie (2020) evidencia la falta de conocimientos matemáticos y prácticas de instrucción de profesores y plantea la necesidad de capacitación docente y realización de investigaciones de este tipo a mayor escala. De aquí, se plantea la pertinencia de realizar estudios que implican el diseño de instrumentos y toma de datos desde diversos enfoques metodológicos.

Por otra parte, al revisar los resultados obtenidos por los estudiantes de Pedagogía en Matemática en Chile, en la prueba de conocimientos disciplinarios y didácticos-disciplinarios en las aplicaciones de la Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente (END-FID), en los procesos de los años 2016, 2017, 2018, 2019, 2020-2021, 2022 y 2023 –rendida un año antes de culminar la carrera– destacan que, el dominio de geometría evidencia sostenidamente un porcentaje de logro promedio menor que en el resto de los temas –sistemas numéricos y álgebra, cálculo, estructuras algebraicas, datos y azar– (Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP], 2017, 2018, s. f., 2020, s. f., s. f., s. f.) y, además, se observa que un alto porcentaje de estudiantes (superior al 40%) se encuentran bajo el porcentaje promedio nacional en geometría. Estos resultados aun siendo discutibles, develan que, este asunto debe ser discutido y revisado en profundidad.

Finalmente, las investigaciones y resultados nacionales sobre la educación (o enseñanza) en geometría reflejan un problema no resuelto en el desarrollo profesional docente, destacando la falta de estudios que conectan la práctica matemática del profesorado en contextos locales y su organización de la enseñanza, con modelos teóricos existentes (e.g., Espinoza-Vásquez et al., 2025). El problema que se presenta pone de relieve la necesidad de poner atención en la enseñanza de la geometría en contextos locales y específicos, así como, la realización de investigaciones basadas en metodologías diversas, que considere el diseño de instrumentos adecuados para la toma de datos específicos y su posterior análisis que permita tomar decisiones fundadas y basadas en el contexto local. El presente proyecto considera como objetivo general *determinar características del espacio de trabajo geométrico desarrollado por profesores de educación secundaria, para el desarrollo de contribuciones a la formación inicial docente de matemáticas, basadas en la relación entre teoría y evidencia empírica.*

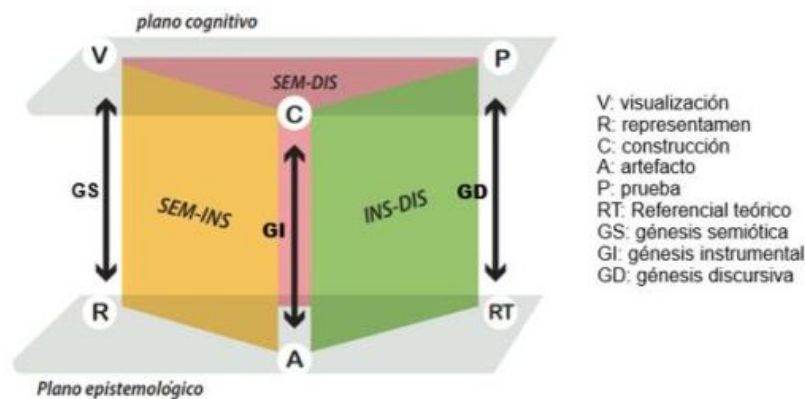
MARCO TEÓRICO

Para el estudio del trabajo matemático de profesores se considera la teoría de los *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM), que ha sido desarrollado para describir la naturaleza del trabajo matemático de las personas (profesores, estudiantes) cuando abordan tareas matemáticas (Kuzniak et al., 2022). Los ETM se conforman por los planos cognitivo y epistemológico, y tres componentes asociados a cada plano: los procesos de *visualización*, *construcción* y *prueba*, en el plano cognitivo; *representamen*, *artefactos* y *referencial*, en el plano epistemológico. La relación de estos componentes de los planos cognitivo y epistemológico se efectúa por medio de tres génesis: *instrumental*, *discursiva* y *semiótica* (Kuzniak et al., 2022), que permiten situar y explicitar la naturaleza del trabajo matemático en diversos contextos educativos e institucionales. Así, la investigación en ETM se basa en comprender la dinámica del trabajo matemático mediante el papel de cada una de las tres génesis anteriores y las interacciones entre éstas (Kuzniak y Richard, 2014).

Para analizar diferentes entradas a los ETM y ver cómo se articulan los planos mediante las génesis, especificando las componentes puestas en juego, se utiliza la denominación *circulación* entre las componentes de los planos en el ETM (Montoya-Delgadillo et al., 2014). En los ETM se considera la noción de *planos verticales* (Kuzniak y Richard, 2014), dado por las interacciones entre las génesis y sus componentes. Estos planos verticales son: [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis]. Así, los ETM se consideran como una herramienta teórica y metodológica que describe en profundidad el trabajo matemático del sujeto y la identificación de los caminos que emergen al resolver una tarea específica (Kuzniak y Nechache, 2021). Un esquema que relaciona los planos, componentes, génesis y planos verticales de los ETM, se muestra en la siguiente Figura (1).

Figura 1

Esquema de los ETM (adaptado de Kuzniak et al., 2016, p. 727)



Las tareas y su diseño ocupan un lugar importante en la teoría de los ETM, pues son entendidas como un medio para la resolución de problemas en el trabajo matemático (Kuzniak, 2022). De este modo, las tareas se definen de una manera amplia y abierta (basada en Sierpinska, 2004), que refiere a cualquier tipo de ejercicio o problema matemático, con supuestos y preguntas claramente formulados, que los estudiantes pueden resolver en un espacio de trabajo matemático definido (Nechache, 2017).

METODOLOGÍA

Para una visión más integral, completa y holística del problema, así como su estudio a partir de diversas fuentes de datos, el proyecto de investigación propone un enfoque mixto de tipo descriptivo, con modelo dominante cualitativo. El diseño mixto es secuencial para conectar, complementar e integrar los resultados (Creswell y Creswell, 2023).

Inicialmente, se desarrolla una fase basada en el enfoque cuantitativo de tipo no-experimental, que permite identificar elementos de la práctica geométrica de profesores. Para ello, se diseña y valida un instrumento (Cuestionario ETM-IG) con preguntas cerradas de varias opciones de respuesta para profesores en servicio que enseñan geometría en Primer Año medio. Específicamente, se considera la enseñanza de los temas: teorema de Thales, homotecias y semejanza de figuras. La elección del nivel escolar y de los temas a enseñar, se basan en la necesidad de extender la investigación existente acerca de la enseñanza de la geometría, para su posterior transferencia a la FID de matemática y, estos temas están presente tanto en el currículo escolar, como en la formación de profesores.

Posteriormente, se desarrolla la fase 2, cuyo enfoque es cualitativo basada en un *estudio de casos* (Stake, 2007), que permite profundizar en los resultados iniciales, relacionados con la caracterización del trabajo geométrico del profesor en el aula. La selección de los profesores informantes considera participantes en la etapa inicial dispuestos a ser grabados en el aula cuando enseñan tópicos específicos. La recolección de datos considera videograbaciones de clases y sus respectivas transcripciones, entrevistas y notas de campo de la investigadora.

La última fase es cualitativa y considera el desarrollo de orientaciones y ejemplos para la formación inicial docente de matemáticas, basada en los resultados de las dos etapas anteriores. La recolección de datos considera videograbaciones y transcripciones, notas de campo de la investigadora y registro escrito de los participantes.

En general, los análisis de datos consideran categorías teóricas provenientes del marco teórico, así como categorías emergentes desde los datos (Henríquez-Rivas et al., 2021; Henríquez-Rivas).

RESULTADOS

Para ilustrar algunos resultados obtenidos en el desarrollo del proyecto, se describen algunos hallazgos de las fases 1 y 3.

Fase 1. Identificar elementos del ETM idóneo del profesorado en servicio

En esta fase se consideró el diseño y validación de contenido del Cuestionario ETM-IG, el cual consideró cuatro etapas que abarcan desde la revisión de literatura, diseño inicial del instrumento, análisis de jueces expertos, hasta la revisión y mejoras del instrumento que consta de 23 ítems. La revisión de literatura consideró (entre otros), una revisión sistemática relacionada con la investigación existente basada en la teoría de los ETM (Panqueban et al., 2024). En cuanto al diseño del instrumento, este considera tres dimensiones asociadas con el *ETM idóneo actual* (Henríquez-Rivas et al., 2022). Los resultados de esta etapa investigativa pueden ser consultados en Henríquez-Rivas y Vergara-Gómez (2025).

Posteriormente, el instrumento fue aplicado a 63 profesores para un segundo proceso de validación, lo cual permitió obtener perfiles preliminares acerca de la enseñanza de tópicos geométricos de la educación secundaria. Los resultados de esta etapa se encuentran en proceso de revisión en una revista científica.

Fase 3. Elaboración de casos provenientes de la fase 2 y su estudio en la FID

El desarrollo de esta fase considera la elaboración de un taller para la formación de profesores. Para ello, se analizaron clases reales provenientes de la fase 2 y, luego, con esta información que proviene de contexto de aula reales, se elaboraron casos de estudio para la FID. Un ejemplo ilustrativo de estos casos, se presenta en la siguiente Figura (2).

Figura 2

Extracto de un caso de estudio elaborado para la FID basado en evidencia empírica de aula

Parte 1: Presentación del caso

Características generales:

La siguiente clase fue realizada el segundo semestre del año 2024 por un docente de matemáticas en la Región del Maule (lo llamaremos P1), en un curso de Primer Año Medio de un Liceo Técnico-Profesional. Durante la clase asistieron 30 estudiantes aproximadamente. Los estudiantes trabajaron durante toda la clase sentados en sus puestos de forma individual.

Descripción de la clase:

El objetivo de clase escrito en la pizarra por P1 dice: *Representar el concepto de homotecia de forma vectorial relacionándolo con el producto de un escalar por un vector.*

P1 comienza recordando conceptos estudiados en clases anteriores sobre homotecia en el sistema de coordenadas cartesianas (cuadrantes, gráfico de puntos, vector, etc.). Al respecto señala:

P1: Ya chiquillos, primero vamos a recordar cierto lo que vimos ayer mediante un ejercicio, recordando que nosotros estamos trabajando ahora la homotecia en el plano cartesiano. ¿Qué quiere decir esto? ¿Que nosotros para poder graficar en este caso ahora

El taller con futuros profesores (realizado el año 2025) considera un trabajo de análisis y reflexión de la práctica geométrica en el aula. Cada caso de estudio se presenta explicitando las tareas implementadas por el profesor durante la clase. Posteriormente, los futuros profesores reflexionan sobre su propia enseñanza en relación con los temas abordados en la clase. Finalmente, desarrollan de forma colaborativa una propuesta de mejoras.

Actualmente, se trabaja en la etapa final de análisis para contribuir con orientaciones para la FID, basada en los hallazgos del proyecto.

CONCLUSIÓN

El presente proyecto de investigación considera la complejidad de conectar un modelo teórico existente con la evidencia empírica de la práctica matemática en el aula, para el desarrollo de contribuciones para la FID, que impacten efectivamente en la formación del profesorado, y que permitan al futuro profesor desarrollar una práctica matemática reflexiva y colaborativa. La investigación reciente en el marco de la teoría de los ETM destaca el potencial de su uso como un modelo analítico y metodológico (Nechache y Gómez-Chacón, 2022), para el análisis del trabajo del profesorado, para el diseño de tareas, la descripción y evaluación del trabajo geométrico, la detección de aciertos, errores y dificultades (entre otros).

El desarrollo de esta investigación aporta al campo de investigación, específicamente contribuye a ampliar los estudios existentes basados en los ETM, también, se plantean mejoras y orientaciones dirigidas a la FID de matemática. En específico, se considera un dominio matemático que requiere particular atención: geometría, dados los bajos resultados obtenidos a nivel nacional en diversas evaluaciones (por ejemplo, END-FID). Así, los resultados obtenidos, los instrumentos elaborados y el desarrollo de las orientaciones y ejemplos podrán ser utilizados en la formación de profesores de matemática (futuros profesores, formadores de profesores, instituciones formadoras).

Agradecimientos: Carolina Henríquez-Rivas agradece a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile (ANID), Proyecto Fondecyt de Iniciación, Folio 11230523.

Referencias

- Almubarak, M., Maat, S. M., y Mahmud, M. S. (2025). Evolving three decades of geometry learning strategies: A combination of bibliometric analysis and systematic review. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(6), em2654. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16515>
- Creswell, J. W. y Creswell, J. D. (2023). *Research design. Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (Sixth Edition). SAGE.

- CPEIP. (2017). *Informe Nacional Evaluación Nacional Diagnóstica de la FID 2016*. Ministerio de Educación de Chile.
- CPEIP. (2018). *Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2017*. Ministerio de Educación de Chile.
- CPEIP. (s. f.). *Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2018*. Ministerio de Educación de Chile.
- CPEIP. (2020). *Informe Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2019*. Ministerio de Educación de Chile.
- CPEIP. (s. f.). *Informe Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2021*. Ministerio de Educación de Chile.
- CPEIP. (s. f.). *Informe Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2022*. Ministerio de Educación de Chile.
- CPEIP. (s. f.). *Informe Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2023*. Ministerio de Educación de Chile.
- Espinoza-Vásquez, G., Henríquez-Rivas, C., Climent, N., Ponce, R., y Verdugo-Hernández, P. (2025). Teaching Thales's theorem: relations between suitable mathematical working spaces and specialised knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 118, 271–293. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10367-9>
- Flores Salazar, J. V., Théry Romero, M. C., Neira Fernández, V., y Peñaloza Vara, T. N. (2025). In-service teachers' mathematical work on quadrilaterals and their technological knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(3), em2604. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16069>
- Henríquez-Rivas, C., y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel [Deepening the geometric work of future teachers in technological environments and pencil and paper]. *Bolema*, 35(71), 1550–1572. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15>
- Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carillo Yáñez, J., Climent, N., y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 123–142. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210>
- Henríquez-Rivas, C., Kuzniak, A., y Masselin, B. (2022). The idone or suitable MWS as an essential transitional stage between personal and reference mathematical work. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, y P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121–146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6
- Henríquez-Rivas, C., y Vergara-Gómez, A. (2025). Design and validation of a questionnaire to explore the geometric work of mathematics teachers. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 103-118. <https://doi.org/10.30935/scimath/16161>
- Herbst, P., Cheah, U. H., Richard, P. R., y Keith, J. (2018). *International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3>

- Kuzniak, A., y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: A study with pre-service teachers based on the theory of mathematical working spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 271–289. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2>
- Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas [Mathematical workspaces. Points of view and perspectives]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4), 5–15. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., y Richard, P. (2022). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM – Mathematics Education*, 48, 721–737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Lagrange, J. B., y Richard, P. (2022). Instrumental genesis in the theory of MWS: Insight from didactic research on digital artifacts. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 211–228). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9
- Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A., y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Relime*, 17(4-I), 191-210.
- Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet: Un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 19, 67–90.
- Nechache, A. y Gómez-Chacón, I.M. (2022). Methodological aspects in the theory of Mathematical Working Spaces. In A. Kuzniak et al. (Eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 33–56). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_2
- Panqueban, D., Henríquez-Rivas, C., y Kuzniak, A. (2024). Advances and trends in research on mathematical working spaces: A systematic review. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6), Article em2450. <https://doi.org/10.29333/ejmste/14588>
- Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: task problematization. *For the learning of mathematics*, 24(2), 7–15.
- Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4.ª ed.). Madrid: Ediciones Morata.
- Tachie, S. A. (2020). The challenges of South African teachers in teaching Euclidean geometry. *International Journal of Learning, Teaching and Educational Research*, 19(8), 297–312. <https://doi.org/10.26803/ijlter.19.8.16>
- Zakaryan, D., y Sosa, L. (2021). Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría. *Educación Matemática*, 33(1), 71–97. <https://doi.org/10.24844/em3301.03>

MODELADO MATEMÁTICO PARA INTEGRAR STEM. PROPUESTA PARA PROFESORES DE SECUNDARIA

María D. Aravena Díaz - maravena@ucm.cl

Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Facultad de Ciencias
Básicas, Universidad Católica del Maule

Abstract:

La investigación forma parte de un estudio más amplio que fue publicado con mayor detalle en Proceedings of the 48th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Research Reports, Vol. 1. PME del año 2025. Se centra en el potencial del modelado matemático que ha sido considerado como puente para integrar las disciplinas STEM (ciencia, tecnología, ingeniería, matemática), porque se alinea de manera interdisciplinaria con la educación STEM. Los procesos de modelado son importantes para que los estudiantes resuelvan problemas locales y globales en concordancia con los desafíos actuales. Debido a la necesidad de contar con profesores cualificados, se implementó un programa de formación para profesores de matemática de secundaria en servicio usando como estrategia de aprendizaje el método de caso. Se presentan los resultados de un estudio de casos múltiples sobre habilidades STEM de grupos de profesores, usando análisis de contenido deductivo. Los hallazgos muestran que el modelado matemático ayuda a los profesores a cultivar e integrar habilidades STEM.

Modelado matemático, habilidades, educación STEM, método de caso, educación
secundaria

INTRODUCCIÓN

El estudio se ha centrado en el potencial y desafíos del modelado matemático como puente para integrar STEM y para una auténtica alfabetización STEM (Hallström & Schönborn, 2019). El modelado matemático se alinea de manera interdisciplinaria con la educación STEM porque conecta la matemática con las otras disciplinas, proporcionando una mayor comprensión en la aplicación de conceptos y procesos matemáticos (Aravena-Díaz et al., 2024; English, 2017;). Está en correspondencia con los propósitos de STEM que enfatizan la comprensión conceptual y amplían su comprensión a través de su uso en ámbitos social y culturalmente relevantes (Baker & Galanti, 2017; Ritz & Fan, 2015).

Para que la educación STEM sea efectiva se requiere contar con docentes cualificados, porque aún los profesores no están preparados para lidiar en este escenario (Kurup et al., 2019). Por ello, se diseñó un programa formativo, con profesores en servicio, que aborda problemas complejos, no estructurados y de solución abierta (English, 2017; Stillman et al., 2020) y usando como estrategia de aprendizaje el método de caso (Passyn & Billups, 2019).

El método de caso centra el aprendizaje en los estudiantes, colocando el énfasis en la discusión y construcción de conocimientos para generar soluciones creativas (Passyn & Billups, 2019). Además, impulsa que los problemas STEM estén con coherencia con las necesidades locales, que requieren articulaciones disciplinarias para su resolución (Aravena-Díaz et al., 2024; Aravena et al., 2025).

La pregunta que guio el estudio fue: ¿Cuáles son las habilidades STEM que integran los profesores en servicio cuando resuelven casos cercanos a la realidad sociocultural de sus estudiantes con base en el modelado matemático?

Modelado matemático para integrar STEM

El término integración STEM es aún difuso y no hay consenso en torno a una definición ni a la terminología para describir integración STEM (Goos et al., 2023; Moore et al., 2023). Sin embargo, hay consenso en señalar ciertas características para su implementación con prácticas asociadas a trabajar problemas complejos y conectados con el mundo real (Aravena-Díaz et al. 2024); fomentar el cultivo de las habilidades necesarias (Brown y Bogiages, 2019) y trabajar problemas que requieren articulaciones interdisciplinarias para su resolución (Aravena-Díaz et al., 2024; Goos et al., 2024). El modelo matemático cumple con las características señaladas por la correspondencia con ideas globalizadoras de las ciencias, la tecnología y la ingeniería, porque se combinan habilidades de las disciplinas STEM (Hallström et al., 2023; Moore et al., 2023)

Educación STEM y modelado matemático en la formación de profesores en servicio

La necesidad de involucrar a profesores en servicio, en modelado y STEM, es un factor esencial para que puedan ampliar la perspectiva en este campo, haciendo uso de tecnologías, aspectos sociales y culturales del modelado y su enseñanza (Stillman et al., 2020). Se recomienda conocimiento matemático profundo, reconocer el papel del conocimiento matemático en la resolución de problemas reales, la matemática incorporada en las otras ciencias y el mundo real (Niss et al., 2007; Stillman et al., 2020), identificar la importancia que tiene la construcción de modelos para comprender la dinámica de los procesos científicos, sociales y culturales y el estudio de ciclos de modelado para entender la correspondencia entre el problema real y la matemática (Blum & Borromeo, 2009).

MÉTODO

El método de investigación es cualitativo con diseño de estudio de casos múltiples (Yin, 2014). Los participantes fueron 9 profesores de matemática de establecimientos públicos de la Zona Centro Sur de Chile y se dividieron en 3 grupos de trabajo (G1, G2 y G3). Se analizaron video grabaciones de cada grupo para capturar el registro verbal del trabajo STEM. Los casos trabajados se enmarcan en las necesidades de la sociedad relacionado con el medio ambiente, agua, transporte y alimentación.

Para el análisis de los datos se levantaron categorías de análisis a partir de la literatura (Aravena-Díaz et al., 2024, Aravena et al., 2025), relacionadas con las habilidades STEM correspondientes a: Habilidades Científicas: lenguaje científico, aplicar procesos investigativos, concluir en base a evidencias, comunicar; Habilidades Tecnológicas: aplicaciones tecnológicas, simular, usar recursos multimedia y comunicar; Habilidades de Ingeniería: estudio de soluciones, diseñar, evaluar soluciones, comunicar y; Habilidades matemáticas; modelar, representar y comunicar. Se consideró las fases del ciclo de modelado de Blum y Borromeo-Ferri (2009): comprender/construir (Fase 1), simplificar (Fase 2), matematizar (Fase 3), trabajar con la matemática (Fase 4), interpretar/proyectar (Fase 5) y validar (Fase 6). El análisis se realizó identificando las frecuencias de las co-ocurrencias entre las habilidades STEM y las fases del ciclo de modelado de los tres grupos de profesores (G1, G2 y G3), mientras resuelven el caso de manera colaborativa. Se utilizó análisis de contenido deductivo con base en las categorías teóricas y códigos declarados previamente.

RESULTADOS

La frecuencia con la que fueron observadas las habilidades STEM a lo largo de las 6 fases del ciclo de modelado, según las categorías (Matemáticas, Ingeniería, Científica y Tecnológica), se despliega en la tabla 1.

Tabla 1

Habilidades STEM según las fases del ciclo de modelación en los tres grupos de trabajo

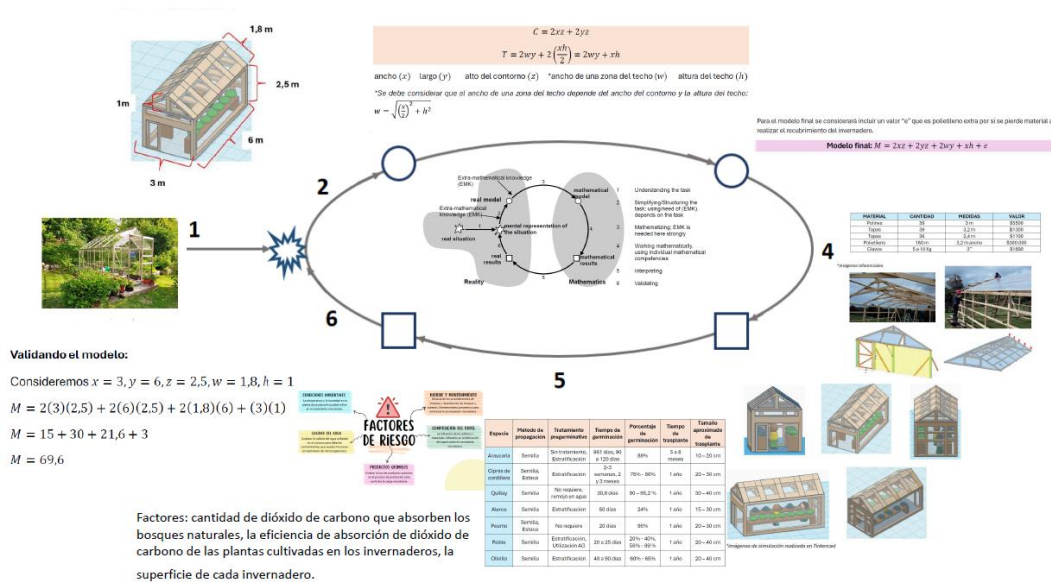
	Fases del ciclo de modelación																		T
	Fase 1			Fase 2			Fase 3			Fase 4			Fase 5			Fase 6			
Grupos/ Habilidad	G1	G2	G3	G1	G2	G3	G1	G2	G3	G1	G2	G3	G1	G2	G3	G1	G2	G3	
S	2	0	4	0	1	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	11
T	4	19	6	1	14	3	2	10	0	5	7	0	1	2	0	4	2	0	80
E	4	17	3	5	13	1	2	15	0	7	14	2	0	6	2	1	5	2	99
M	0	5	3	0	7	2	0	7	1	3	7	0	2	3	0	2	2	0	44
Total	10	41	16	6	35	6	4	34	1	15	29	2	3	11	2	7	10	2	234

De todas las co-ocurrencias, las de mayor frecuencia son las que evidencian la conexión entre las habilidades tecnológicas (T) a lo largo de las fases del ciclo de modelado. Las habilidades de ingeniería (E) se despliegan por la mayoría de las fases del ciclo de modelado, a excepción de la fase 3 donde el G3 no la despliega y G1 en la fase 5. Las habilidades matemáticas se

activan en todas las fases del ciclo de modelado a excepción del G1 que las activa al final de proceso de modelado y G3 solo al inicio. Las habilidades científicas se despliegan en las etapas iniciales del ciclo. En cuanto a la integración STEM, se puede observar en cada fase del ciclo. En la fase 2 destaca la integración entre las cuatro habilidades del G2. En la fase 3 destaca la integración entre las habilidades tecnológicas e ingenieriles en G1 y G2. En las fases 4, 5 y 6 se observa integración entre las habilidades tecnológicas y matemáticas por G2. De los tres grupos el que más resalta, en la manifestación de habilidades STEM, es el G2. A partir del desempeño de este grupo se pueden caracterizar las acciones llevadas a cabo para resolver el caso según las 6 fases del ciclo de modelación, como se muestra en la figura 1.

Figura 1

Resolución del caso según fases del ciclo de modelación por el Grupo 2



Nota: elaboración propia basada en Aravena et al. (2025)

Se puede observar (Figura 1) que el G2 transita por cada fase del ciclo de modelado. En la fase 1, consideran un tipo de invernadero de acuerdo a la lectura del problema. En la fase 2 construyen un invernadero utilizando medidas, a partir de las condiciones del problema, para generar un modelo preliminar. En la fase 3 identifican las relaciones matemáticas para formular el modelo. En la fase 4 trabajan con las ideas matemáticas, apoyándose en las representaciones de prototipos. En la fase 5 describen el tipo de invernadero a partir de las soluciones matemáticas. Advierten factores de riesgo y factores relacionados con la plantación y tipos de árboles. Finalmente, en la fase 6 ponen a prueba la pertinencia del modelo probando las medidas del invernadero para confirmar su factibilidad.

CONCLUSIONES

El método de caso permitió identificar tipos específicos de habilidades STEM (Brown y Bogiages, 2019) en cada una de las fases del ciclo de modelado. Si bien el caso demandó un análisis desde diferentes habilidades STEM (Moore et al., 2023), la integración se manifestó entre las habilidades tecnológicas e ingenieriles. En uno de los grupos se pudo evidenciar presencias relevantes de las habilidades matemáticas, en conjunto con las ingenieriles y las tecnológicas, en todas las fases del ciclo de modelado. La modelación matemática parece ser prometedora para el cultivo de las habilidades STEM (English, 2017; Goos, et al., 2023) y para integrar STEM (Aravena et al., 2025; Hallström et al., 2023; Moore et al., 2023) coincidiendo con autores sobre la importancia de incorporar este tipo de propuestas en las aulas de matemática para una auténtica alfabetización STEM (Hallström & Schönborn, 2019).

Agradecimientos

El estudio fue financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile [ANID], Proyecto FONDECYT 1230865.

Al equipo de investigación compuesto por: Danilo Díaz-Levicoy, Andrea Vergara Gómez y Marcelo Rodríguez Gallardo.

A Noemí Cárcamo Mansilla por el apoyo en los análisis cualitativos.

A los directores y profesores de los establecimientos públicos de la Zona Centro Sur de Chile.

Referencias

- Aravena-Díaz, M.D., Sanhueza-Henríquez, S., Rodríguez, M. y Cárcamo-Mansilla, N. (2024). Mathematical modeling to reduce gender gaps in STEM: characterization of STEM skills in high school students. En V. Geiger, G. Kaiser y H. Siller (Eds.), *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times* (pp. 515-524). Springer.
- Aravena-Díaz, M.D., Vergara-Gómez, A., Díaz-Levicoy, D. y Cárcamo-Mansilla, N. (2025). Mathematical modelling and case method to integrate STEM. En C. Cornejo, P. Felmer, D. M. Gómez, P. Dartnell, P. Araya, A. Peri y V. Randolph (Eds.), *Proceedings of the 48th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Research Reports* (Vol. 1, pp. 51-58). PME.
- Baker, C.K. y Galanti, T.M. (2017). Integrating STEM in elementary classrooms using model-eliciting activities: Responsive professional development for mathematics coaches and teachers. *International Journal of STEM Education*, 4(1), 10.
- Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58
- Goos, M., Carreira, S. y Namukasa, I.K. (2023). Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. *ZDM*, 55, 1199-1217.

- English, L.D. (2017). Advancing elementary and middle school STEM education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 5-24.
- Hallström, J., Norström, P. & Schönborn, K.J. (2023). Authentic STEM education through modelling: an international Delphi study. *IJ STEM Ed*, 10, 62. <https://doi.org/10.1186/s40594-023-00453-4>
- Hallström, J. y Schönborn, K.J. (2019). Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument. *International Journal of STEM Education*, 6, 22.
- Kurup, P.M., Li, X., Powell, G. y Brown, M. (2019). Building future primary teachers' capacity in STEM: based on a platform of beliefs, understandings and intentions. *International Journal of STEM Education*, 6, 10.
- Moore, T.J., Johnston, A.C. y Glancy, A.W. (2023). STEM Integration. A synthesis of conceptual frameworks and definitions. En C.C. Johnson, M.J. Mohr-Schroeder, T.J. Moore y L.D. English (Eds.), *Handbook of Research on STEM Education* (pp. 3-16). Routledge.
- Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3-32). Springer.
- Passyn K.A. y Billups, M.J. (2019). How to improve written case analysis and reduce grading time: The One-Page, Two-Case Method. *Journal of Marketing Education*, 41 (3), 215-229.
- Ritz, J.M. y Fan, S.C. (2015). STEM and technology education: International state-of-the-art. *International Journal of Technology and Design Education*, 25(4), 429-451.
- Stillman, G.A., Kaiser G. y Lampen, E. (2020). Sense-Making in Mathematical Modelling and Applications Educational Research and Practice. En G.A. Stillman, G. Kaiser y C.E. Lampen (Eds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-making* (pp. 15-29). Springer.
- Yin, R.K. (2014). *Case study research design and methods*. (5th ed.). Sage

OBSERVANDO MATEMÁTICAS Y MOVIMIENTOS MÁS ALLÁ DE LAS PALABRAS EN LOS PRIMEROS AÑOS

Paola Ramírez González - pramirez@ucm.cl

Universidad Católica del Maule

Abstract:

En este artículo teórico, desde una perspectiva enactiva, abordaré y discutiré qué podría significar la matemática en el movimiento corporal de niños y niñas en sus primeros años. Para ello, mostraré cómo la distinción en las acciones genera una coordinación entre el observador y lo observado, y cómo la operación de aceptación emerge, en términos matemáticos, a partir de dicha observación, sin necesidad de considerar las palabras, ilustrando con acciones de los primeros años en las que se desencadena su movimiento y que, a la luz del observador, pueden llamarse matemáticas.

Movimiento, primeros años, enactivismo, aprendizaje, verbalización

INTRODUCCIÓN

Durante los primeros años, los movimientos corporales se perciben como algo más que una acción aislada; tienen consecuencias para el aprendizaje temprano de los verbos, donde muchos verbos comunes —por ejemplo, besar, abrazar, patear— parecen referirse a acciones realizadas por partes específicas del cuerpo (Maouene et al., 2008) notando con ello que el movimiento y el aprendizaje van de la mano, más allá de la palabra en si misma, lugar esencial en los primeros años de vida, dado que el lenguaje está en desarrollo, pero también fundamental para el aquellos en donde el lenguaje se desarrolla en diferentes tiempos.

Asimismo, nuestro potencial biológico de neuroplasticidad conlleva la posibilidad de aprender a movernos y la necesidad de hacerlo (Moore et al., 2012). En este sentido de movimiento corporal entre la necesidad y aprender a moverse, se puede observar que en los primeros seis meses de vida la mayoría de los bebés pueden darse la vuelta hacia ambos lados y empezar a sentarse solos, posiblemente apoyándose con las manos. También el bebe puede empezar a mecerse o incluso a gatear. Pueden alcanzar y agarrar objetos, pasarlos de una mano a la otra y llevárselos a la boca para explorarlos, levantar la cabeza y el pecho estando boca abajo y pueden sostener su peso sobre las piernas cuando están de pie. En síntesis, la medida del desarrollo observado y por tanto aprendizaje se da por el movimiento a este nivel.

Sin embargo, a pesar de su elocuente contribución del movimiento corporal en el hacer desde el nacer, en educación matemática, se presta menos atención a los movimientos corporales completos, lo que deja mayor espacio a la palabra o a lo que se dice matemáticamente como forma de expresión que indica aprendizaje matemático, notando que la verbalización de la

matemática presentada por quién la hace, muestra un rol fundamental en la observación, siendo vista como una forma resultado de aprendizaje matemático (por ejemplo, decir el total de la suma al agregar dos números).

Recientemente, ante la importancia del movimiento corporal en la investigación, Macrine y Fugate (2022) respondieron con la publicación de su libro «Movement Matters» (los movimientos importan), marcando un hito de transformación y orientación a esta rama emergente de consideración. En donde, podemos reconocer que el concepto matemático se fundamenta en la experiencia física y sensoriomotora de los cuerpos (Abrahamson & Lindgren, 2014), pero que se reconoce a través de la observación.

Por lo tanto, en este artículo teórico, desde una perspectiva enactiva, analizaré la posición del observador para observar “algo matemático”, ampliando el concepto de distinción y lenguaje de Maturana, definido como la “coordinación de coordinaciones de comportamientos consensuales” (Maturana & Verden-Zöller, 2008, p. 29). Brindando diferentes ilustraciones, mostraré cómo la distinción en las acciones genera una coordinación entre el observador y lo observado, y cómo, a través de dicha observación, emerge la operación de aceptación en términos matemáticos.

TEORÍA ENACTIVA

Desde una posición enactiva, teoría de la cognición con bases biológicas, todos aprendemos a través de la experiencia de hacer, porque “todo conocer es hacer” (Maturana y Varela 1992, p. 27). Específicamente, Varela et al. (2017) propusieron el término “enactivo” para enfatizar que “la cognición no es la representación de un mundo predado por una mente predada, sino más bien la puesta en práctica de un mundo y una mente a partir de la historia de la variedad de acciones que un ser realiza en el mundo” (p. 9). En donde, según Varela et al. (2017) el enfoque enactivo consiste en dos puntos:

- Percepción es una acción guiada
- Las estructuras cognitivas emergen a partir de patrones sensomotores recurrentes que permiten la acción guiada.

Como consecuencia el cerebro no es un computador, no procesa símbolos abstractos o preposiciones, al contrario, el acto de pensar moviliza lo mismo que las actividades sensoriales y motoras en las cuales nosotros funcionamos dentro de lo natural (y también en ambientes socioculturales). Por tanto, cómo pensamos, depende de cómo nos movemos en el mundo, cómo nosotros sabemos operar sobre varios objetos, que herramientas sabemos utilizar adecuadamente, qué lenguaje hablamos en ese mundo incluyendo el movimiento corporal.

OBSERVANDO Y HACIENDO SENTIDO EN MATEMÁTICA

Antes de hablar, los niños comprenden el mundo a través del movimiento corporal. Si hay alguien cerca, puede entender sus movimientos, principalmente gracias a las observaciones y a los patrones que percibe en el comportamiento del niño. A veces, los niños pequeños juegan a esconderse detrás de cortinas o árboles. Esperan un gesto, un movimiento de quienes los rodean, antes de aparecer. En este contexto, el cuerpo se entiende no como un sistema funcional definido en términos de entradas y salidas —como en la ciencia cognitiva funcionalista— sino como un sistema adaptativo, autónomo y capaz de dar sentido a las cosas (Thompson, 2017, p. xxvi, traducción propia). El niño comprende lo que sucede en el juego del escondite porque su cuerpo se adapta mediante los sistemas sensoriomotores y neurológicos, generando activamente patrones de acción significativos. El niño participa en un intercambio mutuo de acciones —escondiéndose, apareciendo o buscando— con los demás. Quienes participan en el juego también realizan movimientos corporales, y en estos intercambios mutuos, comprenden sus propias acciones y las de los demás.

El observador ve las acciones del niño pequeño en el entorno (esconderse) y también participa activamente en ellas y aprende. Así, tanto el niño como la persona que juega con él son observadores. Existe un intercambio mutuo de acciones entre ellos, una comprensión a través de los movimientos corporales que se expresa en el juego del escondite. El aprendizaje surge del movimiento y de la experiencia que tienen al intentar comprender el mundo. Es en este intercambio de acciones donde el sistema nervioso [...] crea información en conjunto con el resto del cuerpo y el entorno (Thompson, 2017, p. xxvi).

De manera similar, y teniendo presente que todo lo que el observador nota depende de su propia historia de interacción (Ramírez, 2019; Ramírez, 2021), en el contexto matemático, según lo que se “ve”, categorizamos las propiedades del llamado objeto matemático. Esta categorización, al igual que la persona que categoriza el juego de esconderse, comienza a tener sentido a partir de los patrones de movimiento que surgen al vivir una aleatoriedad en el movimiento corporal que involucra el juego.

DISCUSIÓN

Dado que cualquier objeto matemático no se define por sí mismo ni por el movimiento corporal, sino por la distinción observada por el observador en la historia de interacción, en donde, es el observador quién es que le atribuye características a la acción realizada, ¿Cuál es el papel del observador y sus propias creencias sobre la naturaleza matemática de dicho movimiento? ¿Qué se revela cuando lo que se observa son las matemáticas a través de los movimientos corporales?

En estas preguntas y a modo de discusión, planteo que pueden surgir diversas categorizaciones a partir de las observaciones que provienen de diferentes observadores, de

igual modo, al observar los movimientos corporales y su posible relación con las matemáticas, la categorización de lo observado está determinada por factores del observador que incluyen expectativas de un comportamiento matemático coherente (Maturana, 2000; Piere & Kieren, 1989; Ramírez, 2021).

Por otro lado, la observación debe considerar el contexto, pues tal como lo demostraron Núñez y Sweetser (2010) al observar el pueblo aymara, vieron que sus propias observaciones variaban según su cultura occidental

Entonces, planteo que se hace necesaria la propia reflexión del observador sobre su comportamiento e interpretación de la observación para comprender las acciones de los demás y las suyas propias, incluso si estas difieren de lo esperado. De forma similar, en matemáticas, es necesario observar cómo cada observador hace su propia comprensión y coherencia matemática cuando un movimiento corporal puede ser observado bajo una acción que indica hacer matemáticas (por ejemplo, contar con los dedos). A partir de esto (en la comprensión y en la coherencia), donde se produce una operación de aceptación de la acción observada en los movimientos corporales realizados que forman o determinan lo que llamamos matemática, dicha aceptación nace de una coordinación entre los participantes de las interacciones que aceptan lo “matemático”.

Finalmente, cabe decir, que en este movimiento creciente de investigación, estudios más recientes han comenzado a incluir la observación de los gestos en educación matemática cómo un constitutivo de hacer matemático abarcando grupos de edad de estudiantes diferentes (Arzarello et al., 2009; de Freitas & Sinclair, 2012; Edwards et al., 2014; Elia et al., 2014; Robutti, 2020; Gandell, 2024), educadores (Alibali et al., 2014; Yoon et al, 2011) como matemáticos en ejercicio (Ohertman et al, 2019) y también el cuerpo en movimiento, como un constitutivo de hacer matemático a la luz del observador (Ramírez, 2025; Ramírez, 2023).

Agradecimientos

Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Chile, FONDECYT INICIACIÓN ID11251892, apoya esta investigación en curso.

Referencias

- Abrahamson, D., & Lindgren, R. (2014). Embodiment and embodied design en R. Keith Sawyer (Ed.). *The Cambridge handbook of the learning sciences* (2nd edition, pp. 358-376). Cambridge University Press.
- Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies Mathematics* 70, 97–109 <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z>

- Alibali, M. W., Nathan, M. J., Wolfgram, M. S., Church, R. B., Jacobs, S. A., Johnson Martinez, C., & Knuth, E. J. (2014). How teachers link ideas in mathematics instruction using speech and gesture: A corpus analysis. *Cognition and Instruction*, 32, 65–100. <https://doi.org/10.1080/07370008.2013.858161>
- de Freitas, E., & Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: Theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1), 133-152.
- Edwards, L. D., Ferrara, F. & Moore-Russo, D. (Eds.). (2014). *Emerging perspectives on gesture and embodiment in mathematics*. Information Age Publishing
- Elia, I., Gagatsis, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). The role of gestures in making connections between space and shape aspects and their verbal representations in the early years: Findings from a case study. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 735-761.
- Gandell, R. (2024). Students' Mathematical Thinking in Movement. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-24. <https://doi.org/10.1007/s40753-023-00233-z>
- Lakoff, G. & Núñez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Macrine, S. L., & Fugate, J. M. (Eds.). (2022). *Movement matters: How embodied cognition informs teaching and learning*. MIT Press.
- Maouene, J., Hidaka, S., & Smith, L.B (2008). Body Parts and Early-Learned Verbs. *Cognitive Science* 32(7), 1200–1216. <https://doi.org/10.1080/03640210802019997>.
- Maturana, H.R. (1987). Everything is said by an observer. In W.I. Thompson (Ed.). *Gaia: A way of knowing. Political implications of the new biology* (pp. 65-82). Lindisfarne Press.
- Maturana, H. R., & Varela, F. J. (1987). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding*. New Science Library/Shambhala Publications.
- Maturana H. R., & Verden-Zöller, G. (2008) *The Origins of Humanness in the Biology of Love*. Charlottesville, VA: Imprint Academic
- Maturana, H. (2000). The nature of the laws of nature. *System research and behavioural Science System*, 17(5), 459-468.
- Moore, C. L., & Yamamoto, K. (2012). *Beyond words: Movement observation and analysis*. Routledge.
- Núñez, R., & Sweetser, E., (2006). With the Future Behind Them: Convergent Evidence From Aymara Language and Gesture in the Crosslinguistic Comparison of Spatial Construals of Time. *Cognitive Science* 30 (3), 401-450.
- Oehrtman, M., Soto-Johnson, H., & Hancock, B. (2019). Experts' construction of mathematical meaning for derivatives and integrals of complex-valued functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5, 394-423.
- Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *FLM: For the Learning of Mathematics*, 39(1), 7– 11.

- Ramirez, P. (2019). *Re-observing the emergence of mathematics learning through conversations in a classroom from an enactivist perspective: a methodological study*. (Doctoral dissertation). University of Bristol.
- Ramirez, P. (2021). Observing how a student becomes coherently aware in mathematics. *For the learning of mathematics* 41(3), pp. 9-13.
- Ramirez, P. (2023). Conscious Awareness of Body Movements in Mathematics. *An interdisciplinary journal: Constructivist Foundation* 18(2), 288-290. <https://constructivist.info/18/2/288.ramirez>
- Ramirez, P. (2025). Observing mathematics and body movements beyond words: Reflection from an observer. In Cornejo, C., Felmer, P., Gómez, D. M., Dartnell, P., Araya, P., Peri, A., & Randolph, V. (Eds.). *Proceedings of the 48th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: General Contributions*. (p. 310). PME 48.
- Robutti, O. (2020). Gestures in Mathematics Education. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100042
- Thompson, E. (2017) in Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (2017). *Revised edition: The embodied mind: Cognitive science and human experience*. MIT Press.
- Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (2017). *Revised edition: The embodied mind: Cognitive science and human experience*. MIT Press.
- Yoon, C., Thomas, M. O., & Dreyfus, T. (2011). Gestures and insight in advanced mathematical thinking. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(7), 891-901.

CONOCIENDO A KOKI, UNA APP MÓVIL PARA EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA EN EDUCACIÓN SUPERIOR

Felipe Ruz Ángel - felipe.ruz.a@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

La enseñanza de la estadística enfrenta desafíos persistentes en la educación superior, especialmente en torno a la comprensión conceptual, la interpretación de datos y el tránsito entre la intuición empírica y el razonamiento formal. En este contexto, Koki surge como una herramienta digital interactiva diseñada para apoyar procesos de aprendizaje más exploratorios, visuales y manipulativos. Esta conferencia presenta tres funcionalidades centrales de la aplicación actualmente operativas: el visualizador de datos, la calculadora de probabilidades y las herramientas de inferencia estadística. A través de ejemplos concretos, se mostrará cómo Koki permite trabajar con datos, explorar distribuciones de manera dinámica, simular experimentos aleatorios y formalizar procedimientos inferenciales a partir de contrastes e intervalos de confianza. Se incluyen análisis exploratorios multivariados accesibles para estudiantes, consultas probabilísticas basadas en distribuciones discretas y continuas, y simulaciones repetidas que permiten introducir de forma intuitiva la lógica inferencial antes de su formalización teórica. Además, se discutirán proyecciones de la herramienta hacia la educación escolar y nuevas funcionalidades en desarrollo. La sesión combinará exposición conceptual con navegación guiada en la versión beta de la app, invitando a los asistentes a explorar su potencial y a reflexionar colaborativamente sobre oportunidades para enriquecer la enseñanza de la estadística en distintos contextos educativos.

App Móvil, Educación superior, Enseñanza de la estadística, Tecnología Educativa

INTRODUCCIÓN

En la actual era de los datos, el dominio de la estadística se ha consolidado como una competencia esencial para el ejercicio ciudadano y profesional informado (Ben-Zvi et al., 2018a). El acceso masivo a la información y la necesidad de tomar decisiones basadas en evidencia han situado al razonamiento estadístico como una habilidad transversal en la formación universitaria. Sin embargo, diversos estudios advierten que su enseñanza continúa centrada en el cálculo y en la aplicación rutinaria de fórmulas, relegando el desarrollo del pensamiento estadístico y la comprensión conceptual (Zieffler et al., 2018; Pfannkuch et al., 2016). Esta brecha entre las demandas actuales de dominio estadístico y las prácticas

docentes vigentes plantea la necesidad de innovar en metodologías y herramientas pedagógicas.

En este escenario, la integración de tecnologías digitales se ha convertido en un componente clave para la modernización de la enseñanza. La literatura especializada destaca que los entornos interactivos —como simuladores, aplicaciones móviles o recursos de visualización de datos— favorecen la exploración, la indagación y la argumentación estadística, permitiendo representar conceptos abstractos de manera tangible (Andre y Lavicza, 2019; Burckhardt et al., 2021). Estas herramientas promueven aprendizajes activos y personalizados, mejoran la motivación y facilitan la retroalimentación inmediata (Castillo et al., 2018; Chen et al., 2020). No obstante, su efectividad depende de que el diseño responda a las necesidades de los usuarios, de modo que la tecnología actúe como mediador y no como obstáculo del aprendizaje (Hassenzahl y Tractinsky, 2006; Herrera, 2023).

Experiencias previas en educación estadística han mostrado el potencial de plataformas como *Fathom*, *TinkerPlots*, *CODAP* o *RossmannChance Applets* para apoyar la comprensión de la variabilidad y la inferencia mediante visualizaciones y simulaciones (Biehler et al., 2012; González et al., 2018; Chance, delMas y Garfield, 2004). Sin embargo, la mayoría carece de versiones en español y de una adaptación contextual los requerimientos del estudiantado, además de no necesariamente integrar enfoques modernos de la educación estadística y el diseño de software educativo (Andre y Lavicza, 2019; Ruz et al., 2025). Esta carencia evidencia la necesidad de desarrollar recursos accesibles, pertinentes y centrados en el usuario.

En respuesta a este desafío surge *Koki*, una app web progresiva (PWA) diseñada bajo los principios del Design Thinking y el User-Centered Design, orientada a fortalecer el aprendizaje de la estadística universitaria mediante recursos interactivos y visuales (Quiñones et al., 2024). Su desarrollo se sustenta en los lineamientos internacionales (Bargagliotti et al., 2020; Carver et al., 2016; Tintle et al., 2020), que recomiendan promover el razonamiento bajo incertidumbre y el trabajo con datos reales a través del uso óptimo de tecnología. Asimismo, se nutre de evidencias empíricas obtenidas con estudiantes universitarios chilenos, cuyas percepciones sobre utilidad, usabilidad y satisfacción guiaron la definición de sus principales funcionalidades (Ruz et al., 2025). Actualmente, *Koki* se concibe como una app que combina visualizaciones dinámicas, calculadoras de probabilidades e inferencia, simuladores y encuestas para la recolección de datos en tiempo real. Estas funcionalidades buscan ofrecer experiencias de aprendizaje activas, personalizadas y accesibles.

Por tanto, la presente conferencia tiene por objetivo exponer el proceso de diseño y evaluación inicial de *Koki* con usuarios reales, así como caracterizar las herramientas disponibles en sus principales funcionalidades para la resolución de problemas estadísticos,

probabilísticos e inferenciales. Con ello se pretende contribuir a la reflexión sobre las oportunidades y desafíos que representa el diseño centrado en el usuario en la enseñanza de la estadística en educación superior.

FUNDAMENTOS DE DISEÑO Y DESARROLLO DE *KOKI*

El desarrollo de *Koki* se sustenta en una articulación entre principios de la educación estadística y los enfoques de diseño centrados en la experiencia del usuario. Esta convergencia responde a la necesidad de crear herramientas tecnológicas que no solo sean funcionales, sino que también promuevan aprendizajes significativos y sostenibles. En esta sección se presentan los fundamentos teóricos que orientaron su diseño y desarrollo.

Perspectiva pedagógica y disciplinar

En el ámbito de la educación estadística, las últimas décadas han estado marcadas por un giro conceptual desde la enseñanza de procedimientos hacia el desarrollo del pensamiento y razonamiento estadístico (Ben-Zvi et al., 2018a; Zieffler et al., 2018). Este cambio implica situar el aprendizaje en torno a problemas auténticos y al análisis de datos reales, donde el estudiantado pueda explorar, formular conjeturas y argumentar a partir de la evidencia. Desde esta perspectiva, el razonamiento bajo incertidumbre se entiende como un proceso de construcción activa, más que como la aplicación mecánica de algoritmos.

Los lineamientos GAISE II (Bargagliotti et al., 2020) proporcionan un marco curricular central para este propósito, proponiendo que la enseñanza de la estadística incorpore el ciclo de investigación estadística —formular preguntas, recolectar/considerar y analizar datos, e interpretar resultados en contexto—. Este ciclo, también reconocido en los niveles universitarios (Carver et al., 2016), subraya la necesidad de integrar las herramientas tecnológicas como mediadores cognitivos para visualizar relaciones, simular procesos aleatorios y comunicar resultados. Así, el aprendizaje estadístico se concibe como una práctica investigativa, en la que la tecnología amplía las posibilidades de exploración y comprensión.

Dentro de estas orientaciones, la inferencia basada en la simulación (Simulation-Based Inference, SBI) ha emergido como un enfoque efectivo para favorecer la comprensión conceptual del razonamiento inferencial. A diferencia de los métodos tradicionales centrados en fórmulas, el enfoque SBI permite a los estudiantes construir la lógica inferencial a través de la experimentación, utilizando simulaciones repetidas que visualizan la variabilidad muestral y la probabilidad de ocurrencia (Tintle et al., 2020; Pfannkuch et al., 2016). Esta aproximación promueve la conexión entre la experiencia empírica y el pensamiento formal, facilitando la transición desde la intuición hacia la comprensión de modelos estadísticos.

Por último, la integración de tecnologías interactivas refuerza además los principios de aprendizaje activo y situado, en coherencia con las recomendaciones de Ben-Zvi et al.

(2018b), quienes destacan que los entornos digitales deben diseñarse para fomentar la exploración, el razonamiento y la argumentación colaborativa. En este sentido, *Koki* se alinea con el paradigma del *learning by exploring*, ofreciendo a los estudiantes un espacio donde pueden manipular datos, observar patrones y contrastar hipótesis mediante herramientas accesibles y visualmente expresivas.

Perspectiva tecnológica y de diseño

Desde el punto de vista tecnológico, *Koki* se desarrolló bajo los principios del Design Thinking y del User-Centered Design (UCD), metodologías que sitúan las necesidades, expectativas y emociones de los usuarios en el centro del proceso creativo (Hassenzahl y Tractinsky, 2006; Preece et al., 2002). El modelo UCD, enfatiza la importancia de comprender el contexto de uso, especificar los requisitos de la experiencia, crear prototipos iterativos y evaluar continuamente con usuarios reales. Este enfoque asegura que la app no solo sea técnicamente funcional, sino también intuitiva, motivadora y coherente con las metas de aprendizaje del público al que se dirige. Complementariamente, el Design Thinking aporta una estructura flexible e iterativa que articula cinco etapas: empatizar, definir, idear, prototipar y testear (Dorst, 2015). Su valor radica en fomentar la creatividad y la colaboración interdisciplinaria, integrando perspectivas de la educación, la ingeniería y el diseño gráfico. En el caso de *Koki*, estas etapas permitieron traducir las necesidades detectadas en la investigación con usuarios (Ruz et al., 2025) en soluciones concretas, configurando funcionalidades que promueven tanto la exploración conceptual como la satisfacción de uso.

La aplicación de estas metodologías se complementó con estrategias propias del desarrollo ágil de software, particularmente el marco SCRUM, que favorece la iteración continua y la retroalimentación constante entre el equipo y los usuarios (Schwaber y Sutherland, 2013). Este enfoque colaborativo permitió ajustar las funcionalidades a partir de pruebas de usabilidad y sesiones de validación con estudiantes y docentes, garantizando una mejora progresiva del producto.

El vínculo entre estos enfoques pedagógicos y tecnológicos constituye la base de la propuesta de *Koki*. Esta app no se concibe únicamente como una herramienta para ejecutar cálculos o representar gráficos, sino como un entorno de aprendizaje experiencial que materializa los principios de la educación estadística, buscando promover experiencias de aprendizaje que sean al mismo tiempo rigurosas, motivadoras y accesibles. Esta integración permite concebir la tecnología no solo como un recurso instrumental, sino como un medio para repensar las prácticas de enseñanza y aprendizaje de la estadística en la educación superior.

METODOLOGÍA

Se adopta una perspectiva mixta de carácter exploratoria y de diseño, orientada a la innovación educativa, con el propósito de desarrollar, implementar y evaluar prototipos de la app en contextos de aprendizaje, permitiendo iterar entre su construcción y la retroalimentación de sus usuarios.

Diseño y desarrollo de *Koki*

El proceso de diseño y desarrollo de *Koki* se organizó siguiendo los principios del Design Thinking, del User-Centered Design (UCD) y del marco ágil SCRUM, metodologías que guían la creación, validación y mejora progresiva del prototipo. El punto de partida fue un diagnóstico empírico sobre la enseñanza de la estadística universitaria en Chile, donde se identificaron dificultades recurrentes en la comprensión conceptual, la baja motivación del estudiantado y la limitada integración de recursos tecnológicos en los procesos de aprendizaje (Ruz et al., 2025). Este estudio, realizado con más de cuatrocientos estudiantes universitarios, permitió perfilar los intereses, expectativas y estilos de uso tecnológico del público objetivo de la aplicación.

En paralelo, el diseño de la aplicación fue desarrollado siguiendo las etapas de empatizar, definir, idear, prototipar y testear (Quiñones et al., 2024). Durante la etapa de *empatizar*, se realizaron entrevistas y encuestas a estudiantes y docentes de distintas disciplinas, identificando la necesidad de una herramienta que facilitara, por ejemplo, la visualización de datos, la comprensión de la probabilidad y la recolección de datos en tiempo real. En *definir*, se consolidaron los perfiles de usuario (profesor y estudiante) junto con los objetivos de aprendizaje asociados. Posteriormente, en *idear y prototipar*, se diseñaron las pantallas, flujos de navegación y arquitectura general de la aplicación, los cuales fueron validados mediante pruebas de usabilidad con usuarios reales.

A nivel de desarrollo tecnológico, *Koki* fue concebida como una aplicación web progresiva (PWA), compatible con dispositivos móviles y de escritorio, accesible desde navegadores sin necesidad de instalación previa. Esta decisión técnica buscó maximizar su portabilidad, reducir las barreras de acceso y permitir actualizaciones automáticas. El proceso de desarrollo se gestionó bajo el marco ágil SCRUM, que promueve ciclos cortos de trabajo y retroalimentación continua (Schwaber y Sutherland, 2013). Cada iteración permitió ajustar funcionalidades, mejorar la interfaz y optimizar la experiencia de usuario a partir de la observación directa y de los comentarios de los usuarios en pruebas controladas de laboratorio.

Actualmente, la versión beta de *Koki* se encuentra disponible para descarga y prueba abierta en www.koki.cl/descargar. Esta versión corresponde al resultado de dos años de desarrollo continuo e integra funcionalidades completas y otras en proceso de expansión, permitiendo

a estudiantes y docentes explorar los primeros módulos operativos en contextos reales de aprendizaje.

Estado actual de *Koki* y sus funcionalidades

Koki se organiza en torno a un sistema de perfiles duales —profesor y estudiante— que permite gestionar la interacción pedagógica y la personalización de experiencias. El profesorado puede crear y administrar cursos, asignaturas y paralelos, integrando a sus estudiantes de manera local o institucional. Esta estructura busca facilitar la gestión de actividades, el seguimiento del progreso y la creación de comunidades de aprendizaje interconectadas. Entre las funcionalidades ya implementadas, tres constituyen el núcleo actual de la app:

Visualizador de datos

Esta funcionalidad posibilita trabajar con conjuntos de datos externos, ingresados manualmente o generados por la propia audiencia mediante encuestas o juegos. Permite representar hasta cuatro variables simultáneamente, fomentando el pensamiento multivariado. Incluye opciones para elaborar gráficos de barras o sectores, histogramas, boxplots, diagramas de dispersión, nubes de palabras y representaciones en escala. Las visualizaciones son interactivas y actualizables en tiempo real, favoreciendo el análisis exploratorio y la discusión colectiva de los resultados.

Calculadora de probabilidades

Este componente ofrece un entorno visual para el cálculo de probabilidades en distribuciones discretas y continuas, con variación dinámica de parámetros y visualización gráfica de la forma de las distribuciones. Permite explorar probabilidades acumuladas como áreas bajo la curva, facilitando la comprensión visual del comportamiento de distribuciones más empleadas en cursos introductorios, como la binomial, poisson, normal, exponencial, t de Student, chi-cuadrado, entre otras.

Herramientas de inferencia estadística

Organizadas en dos grupos, combinan herramientas que buscan integrar el aprendizaje experiencial con la comprensión formal, reforzando la conexión entre intuición, evidencia y modelización: (1) *Simulaciones computacionales*, que permiten construir la lógica de la inferencia mediante la repetición de experimentos aleatorios, visualizando la variabilidad muestral y la frecuencia de ocurrencia; y (2) *Calculadora de inferencia*, donde se ofrecen procedimientos automatizados para estimar parámetros por intervalos de confianza e implementar pruebas de hipótesis, acompañados de representaciones visuales del contraste y la zona crítica.

Junto con estas funciones, *Koki* incorpora y proyecta otras herramientas complementarias, como:

- *Perfiles institucionales integrados*, que permitirán vincular cursos y docentes bajo una misma plataforma de gestión (en desarrollo).
- *Encuestas dinámicas*, que facilitan la recolección de datos en tiempo real adaptados a los intereses del estudiantado (en desarrollo).
- *Juegos breves*, diseñados para generar datos experimentales y analizarlos inmediatamente mediante el visualizador y las herramientas inferenciales (en desarrollo).
- *Asistente inteligente*, que ofrecerá apoyo personalizado a los estudiantes mediante un chat de tutoría, cuyas fuentes serán definidas por cada profesor (en desarrollo).

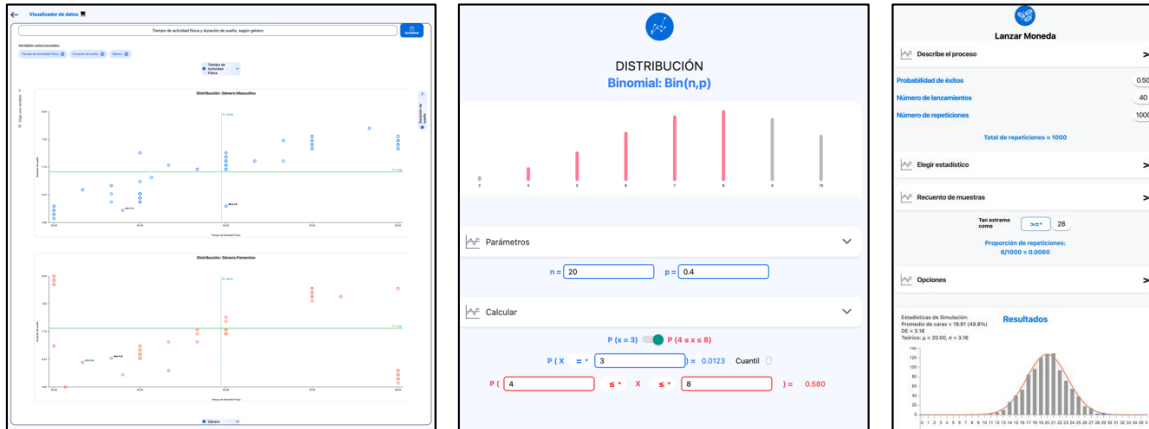
En esta conferencia se ejemplificarán tres de las funcionalidades ya desarrolladas y en fase de validación (el visualizador de datos, las calculadoras de probabilidades y las herramientas de inferencia estadística), mostrando cómo pueden integrarse en la resolución de problemas estadísticos.

RESULTADOS

A continuación, se presentan los principales resultados vinculados a ejemplificar las funcionalidades actualmente operativas de *Koki*, organizadas en torno a los tres ejes centrales de la aplicación: el visualizador de datos, la calculadora de probabilidades y las herramientas de inferencia estadística. La Figura 1 sintetiza estos tres ámbitos a través de ejemplos que ilustran la manera en que *Koki* articula exploración visual, experimentación computacional y análisis formal, proporcionando el marco para la descripción detallada que se expone en las subsecciones siguientes.

Figura 1

Ejemplos de herramientas de koki para (a) un análisis multivariado, (b) una consulta probabilística y (c) una simulación repetida de un experimento aleatorio.



(a) Visualizador de datos

(b) Calculadora probabilidades

(c) Simulador

Visualizador de datos

El visualizador de datos de *Koki* constituye la herramienta principal para el análisis de datos dentro de la aplicación y ejemplifica su orientación hacia el aprendizaje activo. Diseñado para explorar y representar información de forma dinámica, permite trabajar con datos cargados por el usuario o generados en el aula. Más que ofrecer gráficos automáticos, busca propiciar la formulación de preguntas y la construcción de significado contextualizado a partir de patrones observados.

Para ejemplificar su potencial, se presenta una situación basada en datos sobre hábitos de sueño y salud, que reúne información sobre dinámicas de descanso, bienestar y actividad física de un grupo de estudiantes universitarios. El conjunto incluye variables como género, edad, duración y calidad del sueño, actividad física, nivel de estrés, IMC y presencia de trastornos del sueño. A partir de este material, se puede desarrollar en el aula un análisis exploratorio sobre *¿qué factores parecen influir más en la calidad del sueño de los estudiantes?*, dando paso a atender interrogantes del tipo, *¿cómo se distribuyen las horas de sueño y las categorías de IMC en la muestra?* (P1-análisis univariado); *¿existen diferencias en el tiempo de actividad física según el nivel de estrés reportado por los estudiantes?* (P2-diferencias entre grupos); y *¿qué relación se observa entre el tiempo de actividad física y la duración del sueño, y cómo varía según el género?* (P3-asociación multivariada).

En la P1, el análisis se orienta a describir las variables por separado, mostrando las distintas herramientas que ofrece el visualizador según su tipo. Cuando la variable es categórica, como

el *IMC*, el usuario puede optar entre un gráfico de barras o de sectores, con la posibilidad de visualizar las frecuencias absolutas y relativas de cada categoría. Si la variable es numérica, como la *duración del sueño*, la aplicación permite representar la distribución mediante un histograma o un boxplot, en los que es posible desplegar medidas como la media, mediana, desviación estándar o el RIQ, así como seleccionar el número de intervalos del histograma. Estas herramientas facilitan la exploración univariada de los datos, permitiendo observar, por ejemplo, la proporción de estudiantes en cada categoría de IMC o la tendencia central y dispersión de las horas de sueño en la muestra.

En la P2, la interacción entre dos variables permite avanzar hacia un análisis comparativo entre grupos. En este caso, al relacionar una variable numérica —por ejemplo, el *tiempo de actividad física*— con una categórica —como el *nivel de estrés*—, el visualizador genera un conjunto de histogramas o boxplots, uno para cada categoría de la variable cualitativa seleccionada. La interfaz permite elegir entre mantener los gráficos separados o fusionarlos en una sola vista, diferenciando los grupos mediante una escala de colores. Además, pueden mostrarse los mismos estadísticos descriptivos que en el análisis univariado, pero ahora calculados para cada grupo. Estas opciones posibilitan comparar visualmente las distribuciones y apreciar patrones generales, como que los estudiantes con menor nivel de estrés tienden a registrar mayor tiempo de actividad física.

Finalmente, en la P3, el análisis se centra en la posible relación entre dos variables numéricas, incorporando una categórica como factor diferenciador. Al seleccionar, por ejemplo, *tiempo de actividad física* y *duración del sueño*, junto con *género* como variable de agrupación, la app genera un gráfico de dispersión para cada categoría o un único gráfico combinado donde cada punto se colorea según el grupo correspondiente (Figura 1a). Esta representación permite identificar tendencias generales y posibles diferencias entre categorías, observando si las relaciones entre las variables cuantitativas presentan tendencias o concentraciones distintas. Además, el visualizador posibilita integrar una cuarta variable, cuya naturaleza determina una nueva dimensión visual. Si es numérica, se representa mediante el tamaño de los puntos; y si es categórica, mediante variaciones de color. Estas funciones amplían las posibilidades de análisis multivariado y fomentan la interpretación de patrones complejos, permitiendo a los estudiantes explorar simultáneamente la covariación, la dispersión y las posibles interacciones entre factores.

Calculadora de probabilidades

La calculadora de probabilidades de *Koki* fue diseñada para favorecer la comprensión conceptual de las distribuciones de probabilidad y su interpretación como medidas de incertidumbre, además sistematizar el cálculo de probabilidades asociado. Esta herramienta permite representar tanto distribuciones discretas (binomial, poisson, geométrica e hipergeométrica) como continuas (normal, t de Student, chi-cuadrado, F, uniforme,

exponencial, gamma y beta), y ofrece un entorno interactivo en el que los usuarios pueden modificar parámetros, definir intervalos y visualizar gráficamente las probabilidades asociadas a los eventos. El gráfico generado se actualiza de forma automática al ajustar los valores, mostrando en color el área correspondiente a la probabilidad seleccionada.

Para ilustrar su potencial pedagógico, se plantea la siguiente situación problema, inspirada en una de las experiencias aplicadas durante el proceso de validación de la app: “Ariel es creador de contenido digital y desea estimar cuántas de sus posts mensuales podrían considerarse exitosas. Según sus registros anteriores, cada post tiene una probabilidad de 0.4 de superar las mil interacciones. Si publica veinte veces al mes, ¿qué probabilidad tiene de que más de diez publicaciones sean exitosas?”.

En la interfaz de la app, el usuario selecciona la distribución binomial, definiendo los parámetros n por 20 y p por 0.4. Al ingresar la condición $P(X > 10)$, el gráfico de la distribución de probabilidad muestra en color el área correspondiente a los valores mayores a diez. De manera simultánea, se entrega el valor de la probabilidad con cuatro decimales, junto con la posibilidad de modificar dinámicamente los parámetros y observar el efecto sobre la forma de la distribución. El cambio en p , por ejemplo, permite visualizar cómo se desplaza la simetría y concentración de la distribución, favoreciendo la comprensión del rol de cada parámetro en el modelo probabilístico.

Una segunda consulta que puede realizar Ariel es determinar la probabilidad de obtener entre cuatro y ocho posts exitosos en un mes, lo que se traduce en $P(4 \leq X \leq 8)$. Al seleccionar este rango, la aplicación somete a color el área intermedia del gráfico, mostrando visualmente la magnitud relativa de la probabilidad (Figura 1b). Este recurso gráfico refuerza la interpretación de la probabilidad como proporción del área total bajo la función de distribución, haciendo visible la suma de probabilidades discretas que definen el evento.

El paso siguiente consiste en analizar un escenario con mayor número de posts, por ejemplo, si Ariel planifica 50 posts mensuales manteniendo la misma probabilidad de éxito (0.4). En este caso, aun cuando la app permite valores de n hasta 200, puede ser valioso utilizar la distribución normal como aproximación de la binomial, y comparar ambos escenarios. Al ingresar estos valores en la sección de distribución normal, la interfaz muestra una curva acampanada donde el área bajo la curva representa la probabilidad buscada. Esta transición entre la binomial y la normal evidencia la continuidad del razonamiento probabilístico entre modelos discretos y continuos, y contribuye a evidenciar la estrecha relación entre ambos bajo ciertas condiciones.

Herramientas de inferencia estadística

Las herramientas de inferencia estadística de *Koki* buscan integrar la experimentación empírica con la formalización teórica, permitiendo que los estudiantes comprendan los

fundamentos de la inferencia desde la exploración visual hasta el cálculo analítico. Se organiza en dos componentes complementarios: las *simulaciones computacionales*, orientadas a generar escenarios que permiten representar resultados en repetidas ocasiones, y la *calculadora de inferencia*, que automatiza el cálculo teórico de intervalos de confianza y contrastes de hipótesis para distintos parámetros.

Para ilustrar el uso de estas funcionalidades, se propone la siguiente situación: “Camila participa frecuentemente en sorteos digitales donde cada concurso selecciona a un único ganador entre todos los inscritos. Durante el último semestre, se inscribió en cuarenta sorteos y ganó en veintiocho de ellos. Surge entonces la pregunta: ¿pueden estos resultados atribuirse al azar?”

En una primera etapa, se recurre a la herramienta de *lanzamiento de la moneda*, que permite modelar el fenómeno mediante la repetición de experimentos aleatorios dicotómicos. Se asume que cada sorteo corresponde a un ensayo de Bernoulli con probabilidad de éxito 0.5, representando un escenario completamente aleatorio. Los estudiantes configuran el simulador con 40 repeticiones (concursos) y ejecutan una secuencia de, por ejemplo, 1000 simulaciones para estimar la distribución de la cantidad de victorias obtenidas. De esta forma, es posible explorar qué tan inusual es observar un resultado como el de Camila en estas repeticiones. Los resultados se muestran en un histograma dinámico, donde el eje horizontal representa los posibles números de aciertos y el eje vertical sus frecuencias relativas. Además, permite ingresar el resultado observado para determinar la proporción de simulaciones que alcanzan o superan ese número de éxitos, aproximando empíricamente el p-valor. La visualización resultante (Figura 1c) permite observar que el resultado real de Camila se ubica en una zona poco frecuente del modelo, lo que motiva la discusión sobre la significación estadística y la plausibilidad del azar como explicación, todo esto sin la necesidad de introducir teóricamente las pruebas de significación.

En la segunda etapa, se avanza hacia la formalización de la técnica inferencial utilizando la calculadora. En este entorno, los usuarios pueden seleccionar entre cuatro opciones de parámetros (proporción, diferencia de proporciones, medias y diferencia de medias), que requieren datos concretos. Para el caso del problema, se ingresa el tamaño muestral (40), número de éxitos (28) y el valor de p establecido en H_0 (0.5) en el escenario de éxito equitativo en cada concurso, y la app automatiza el cálculo del p-valor y también el estadístico de prueba (permitiendo la reflexión entre las lógicas de los contrastes de hipótesis y las pruebas de significación). Además, se genera un gráfico de la distribución muestral de la proporción bajo H_0 , junto con la zona crítica asociada al nivel de significancia establecido. Esta visualización permite comparar el resultado empírico obtenido por simulación con el valor teórico del contraste, fortaleciendo la comprensión del concepto de p-valor como probabilidad de obtener un resultado igual o más extremo que el observado bajo H_0 .

Adicionalmente, la calculadora ofrece la opción de construir un intervalo de confianza para la proporción, según el nivel de significancia establecido en el contraste, haciendo explícito el vínculo entre ambas técnicas inferenciales.

CONCLUSIONES

El desarrollo de *Koki* ha sido un esfuerzo orientado a responder al desafío de contar con herramientas accesibles, flexibles y pedagógicamente fundamentadas que permitan apoyar la comprensión de la estadística desde una perspectiva exploratoria, interactiva y dinámica. A lo largo de este trabajo se ha mostrado cómo la aplicación integra visualizaciones dinámicas, simulaciones computacionales y herramientas de inferencia para facilitar la conexión entre la intuición inicial y el razonamiento formal, permitiendo que los estudiantes manipulen los conceptos en acción y participen activamente en su construcción.

Sin embargo, es importante subrayar que *Koki* no pretende ser una solución cerrada ni definitiva. Por el contrario, su diseño responde a la convicción de que la mejora en la enseñanza de la estadística es un proceso en permanente evolución, que requiere diálogo constante entre investigadores, docentes, desarrolladores y estudiantes. En este sentido, *Koki* aspira a contribuir como un recurso más dentro del conjunto de iniciativas que buscan renovar la educación estadística, ofreciendo un espacio donde el error, la exploración y la experimentación se transformen en oportunidades de aprendizaje auténtico y a la mano de todos los estudiantes.

Las funcionalidades presentadas en esta conferencia evidencian que la aplicación permite abordar distintos procesos, desde la exploración inicial de datos, pasando por la construcción visual de distribuciones y el análisis de probabilidades, hasta la inferencia estadística apoyada en simulaciones y cálculos teóricos. En cursos universitarios, esta secuencia ha mostrado ser especialmente valiosa para reducir la distancia entre lo abstracto y lo concreto, facilitando que los estudiantes comprendan de manera gradual y dinámica conceptos que suelen generar dificultad, como la variabilidad muestral, las distribuciones de probabilidad o el significado del p-valor.

Asimismo, el desarrollo de *Koki* ha sido posible gracias al financiamiento institucional de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y a un proyecto FONDEF de la ANID, lo que ha permitido consolidar una versión beta funcional. No obstante, queda un camino amplio por recorrer, donde incorporar nuevas funcionalidades, optimizar el rendimiento en diferentes dispositivos, profundizar en la accesibilidad, integrar módulos que respondan a necesidades específicas de cursos avanzados y, especialmente, sistematizar evaluaciones con usuarios diversos, tanto profesores y estudiantes, que permitan seguir calibrando y mejorando la herramienta.

Aunque el diseño de *Koki* surge desde el contexto universitario, las experiencias recogidas durante su desarrollo sugieren que muchas de sus funciones tienen un potencial prometedor para avanzar hacia la educación escolar. Las visualizaciones dinámicas, las simulaciones computacionales, las representaciones interactivas de distribuciones y la posibilidad de trabajar con datos generados directamente en el aula son elementos valiosos para introducir, desde la etapa escolar, formas de razonamiento estadístico más ricas y profundas. Una proyección relevante consiste en generar módulos y secuencias didácticas que faciliten el trabajo con estudiantes de enseñanza media, contribuyendo a una educación estadística que prepare y motive para los desafíos del mundo contemporáneo.

Por tanto, *Koki* es un proyecto vivo, abierto y en expansión, que busca dialogar con las necesidades reales de quienes enseñan y aprenden estadística. Su aporte no reside únicamente en las funcionalidades implementadas, sino en la invitación a construir, de manera colaborativa, nuevas formas de entender y enseñar la estadística. Si la aplicación logra acompañar a docentes y estudiantes en este proceso, y si logra fomentar una experiencia más cercana, comprensible y crítica con los datos, habrá cumplido su propósito fundamental.

Agradecimientos

Proyecto FONDEF ID24I10075 y grupo de investigación EDEPRO Chile (www.edepro.cl).

Referencias

- Andre, M., y Lavicza, Z. (2019). Technology changing statistics education: Defining possibilities, opportunities and obligations. *Electronic Journal of Mathematics & Technology*, 13(3), 253–264.
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., y Spangler, D. (2020). *Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II*. ASA.
- Ben-Zvi, D., Makar, K., y Garfield, J. (Eds.). (2018a). *International handbook of research in statistics education*. Springer.
- Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K., y Ainley, J. (2018b). Design of statistics learning environments. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education*. Springer.
- Biehler, R., Ben-Zvi, D., Bakker, A., y Makar, K. (2012). *Technology for enhancing statistical reasoning at the school level*. En M. Clements et al. (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643–690). Springer.
- Burckhardt, P., Nugent, R., y Genovese, C. R. (2021). Teaching statistical concepts and modern data analysis with a computing-integrated learning environment. *Journal of Statistics and Data Science Education*, 29(1), S61–S73.
- Carver, R., Everson, M., Gabrosek, J., Horton, N., Lock, R., Mocko, M., ... y Wood, B. (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) College Report*. ASA

- Castillo, N., Guzmán, M., Matus, P., Rivera, C., y Marín Zavala, J. (2018). Serious games y educación superior. *Revista Internacional De Estudios Sobre Sistemas Educativos*, 2(8), 250-268.
- Chance, B., delMas, R., y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Springer.
- Chen, X., Xie, H., Zou, D., y Hwang, G. J. (2020). Application and theory gaps during the rise of artificial intelligence in education. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 1, 100002.
- Dorst, K. (2015). *Frame innovation: Create new thinking by design*. MIT Press.
- González, J., López, M., Cobo, E., y Cortés, J. (2018). Assessing Shiny apps through student feedback: Recommendations from a qualitative study. *Computer Applications in Engineering Education*, 26(5), 1813–1824.
- Hassenzahl, M., y Tractinsky, N. (2006). User experience—a research agenda. *Behaviour & Information Technology*, 25(2), 91–97.
- Herrera, J. (2023). *Herramientas y aplicaciones para la enseñanza de la estadística en educación superior: Una revisión sistemática* (tesis de magíster). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C., y Ziedins, I. (2016). Probability modeling and thinking: What can we learn from practice? *SERJ*, 15(2), 11–37.
- Preece, J., Rogers, Y., y Sharp, H. (2002). *Interaction design: Beyond human-computer interaction*. John Wiley & Sons.
- Quiñones, D., Ruz, F., Díaz-Arancibia, J., Paz, F., Osega, J. y Rojas, L. F. (2024). Innovating Statistics Education: The Design of a Novel App Using Design Thinking. *Applied Sciences*, 14(18), 8515
- Ruz, F., Ubilla, F., Videla, P., Zamora, J., y Herrera, J. (2025). *Innovating mobile learning in statistics: Profiling university students' needs and expectations*. *Proceedings of IASE Satellite Conference 2025*.
- Schwaber, K., y Sutherland, J. (2013). *La guía de Scrum*. ScrumGuides.org.
- Tintle, N., Chance, B., Cobb, G., Rossman, A., Roy, S., Swanson, T. y VanderStoep, J. (2020). *Introduction to statistical investigations*. John Wiley & Sons.
- Zieffler, A., Garfield, J., y Fry, E. (2018). What is statistics education? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 37–70). Springer.

LOS MODOS DE PENSAMIENTO COMO PROGRAMA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA (2010– 2025)

Marcela Parraguez González - marcela.parraguez@pucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Abstract:

Durante más de una década, la teoría de los Modos de Pensamiento de Sierpinska ha orientado una línea sostenida de investigación en Didáctica de la Matemática desarrollada en el Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Esta teoría propone que la comprensión de un fragmento matemático surge de la interacción entre formas de pensamiento teórico y práctico. En el caso del álgebra Lineal, por ejemplo, Sierpinska identificó los modos Sintético-Geométrico (SG), Analítico-Aritmético (AA) y Analítico-Estructural (AE), mientras que investigaciones posteriores han reconocido otras configuraciones de modos según los objetos y contextos matemáticos abordados.

El trabajo aquí presentado sintetiza resultados obtenidos entre 2010 y 2025 en torno a la operacionalización de esta teoría en diversos dominios matemáticos —álgebra lineal, cónicas, derivada, grupos, conjuntos cíclicos y sistemas numéricos— y su evolución metodológica hacia modelos cognitivos relacionados mediante “articuladores” entre modos de pensar. Los hallazgos muestran la potencia explicativa de la teoría para caracterizar obstáculos epistemológicos y transiciones cognitivas, así como su aplicabilidad en el diseño de trayectorias de aprendizaje y tareas ad-hoc. Finalmente, se discuten proyecciones recientes que vinculan los Modos de Pensamiento con constructos de la neurociencia cognitiva, como las funciones ejecutivas básicas, para explorar la interacción entre pensamiento teórico y práctico en procesos de modelación y aprendizaje matemático.

Didáctica de la Matemática, Modos de Pensamiento, Álgebra Lineal, Comprensión
Matemática, Articuladores Cognitivos

INTRODUCCIÓN

La teoría de los Modos de Pensamiento (MP), propuesta por Anna Sierpinska (2000), surge como respuesta a una cuestión persistente en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal: ¿por qué los estudiantes muestran dificultades para comprender conceptos teóricos, a pesar de manejar con soltura los procedimientos prácticos? Desde sus primeras formulaciones, Sierpinska planteó que el pensamiento matemático oscila entre dos polos complementarios: el pensamiento práctico (PP), orientado a la acción inmediata, y el pensamiento teórico (PT), dirigido a la reflexión y a la búsqueda de relaciones entre conceptos. Esta tensión dialéctica constituye el eje de una teoría cognitiva que permite describir la comprensión de un

fragmento de la matemática —denotado como F — a partir de la interacción entre distintos modos de pensar dicho fragmento.

Durante los últimos quince años, un grupo de investigadores de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso ha desarrollado una línea de investigación que amplía, operacionaliza y valida empíricamente la teoría de Sierpinska. En esta trayectoria se han abordado diversos fragmentos matemáticos, tales como la dimensión de un espacio vectorial (Maturana y Parraguez, 2012), las cónicas (Bonilla, y Parraguez, 2013; Astorga y Parraguez, 2014, 2019; Parraguez et al., 2019), los sistemas de ecuaciones lineales (Campos y Parraguez, 2019), la derivada en perspectiva local (Pinto-Rojas y Parraguez, 2017), los sistemas numéricos (Parraguez et al., 2021; Randolph y Parraguez, 2022); el concepto de Grupo (Campos y Parraguez, 2021) y conjunto cíclicos (Vidal-Szabó et al., 2023). Estas investigaciones convergen en propósitos comunes: (a) comprender cómo los estudiantes y profesores movilizan, articulan y transitan entre MP para construir significado matemático y (b) reconocer que los MP no constituyen categorías fijas, sino expresiones cognitivas que emergen según la epistemología del fragmento matemático en consideración.

El presente trabajo sintetiza los principales avances de la línea de investigación desarrollada sobre los MP, destacando su evolución teórica, metodológica y empírica. Además, examina las proyecciones actuales de la teoría hacia la modelación cognitiva y su articulación con constructos neurocognitivos, en particular con las funciones ejecutivas básicas (la inhibición). En conjunto ofrece una visión integrada de más de una década de investigación que ha consolidado a los MP como un Programa de Investigación robusto para estudiar la comprensión matemática en diferentes niveles educativos y para orientar el diseño de procesos de enseñanza que articulen lo teórico y lo práctico.

ELEMENTOS TEÓRICOS O CONCEPTUALES

Los orígenes de la teoría de los Modos de Pensamiento

La teoría de los MP fue propuesta por Anna Sierpinska (2000, 2002, 2005) en el contexto de sus investigaciones sobre la comprensión del álgebra lineal en estudiantes universitarios. A partir de extensas observaciones y análisis de tareas, Sierpinska identificó que las dificultades recurrentes en este dominio no se explicaban solamente por la complejidad de los contenidos, sino por la coexistencia de diferentes maneras de pensar la matemática: unas más ligadas a la manipulación de procedimientos y otras al razonamiento sobre estructuras abstractas.

La autora denominó PP a aquel que se orienta a la acción y a la resolución inmediata de problemas, y PT al que se dirige hacia la reflexión y la búsqueda de coherencia en sistemas de relaciones conceptuales. Sin embargo, ambos no se conciben como opuestos, sino como polos de una tensión cognitiva productiva y la comprensión matemática emerge en la

interacción entre lo teórico y lo práctico. Esta complementariedad constituye el fundamento ontológico de los MP.

Fundamentos filosóficos y psicológicos

Desde Hume (1978) hasta Piaget (1955), se reconoce que el pensamiento humano oscila entre actuar y comprender, fundamento de la relación entre PT y PP. Esta tensión dialéctica ha sido interpretada desde distintas tradiciones filosóficas y psicológicas. Para Hume, el conocimiento surge de la experiencia sensible y de las asociaciones que el sujeto establece a partir de la percepción. Kant (1998), en cambio, plantea que el entendimiento organiza la experiencia a través de categorías a priori, otorgando unidad a lo múltiple percibido. Dewey (1993) retoma esta relación desde una perspectiva pragmatista, concibiendo el pensamiento como una forma de acción reflexiva en la que la experiencia y la reflexión se retroalimentan de manera continua. Finalmente, Piaget (1995) aporta una comprensión epistemológica del pensamiento como proceso de construcción y reorganización mental basado en un tránsito constante entre la asimilación y la acomodación, en una dialéctica que combina acción y conceptualización.

En conjunto, estas perspectivas configuran un marco filosófico y psicológico que sustenta la comprensión del pensamiento matemático como una actividad en equilibrio dinámico entre la acción práctica y la elaboración teórica. Esta concepción constituye la base sobre la cual se desarrollan los principios de la teoría de los *Modos de Pensamiento*, orientados a describir cómo los sujetos coordinan lo práctico y lo teórico en la construcción del conocimiento matemático.

Fundamentos didácticos: la complementariedad entre acción y reflexión

En el campo de la Didáctica de la Matemática, la complementariedad entre acción y reflexión ha sido abordada por diversos autores. Steinbring (1991) advirtió que el énfasis excesivo en la contextualización y la resolución de problemas podría diluir el carácter esencialmente teórico del conocimiento matemático. En cambio, Freudenthal (1973) y Gravemeijer (1997) propusieron que la matemática debe entenderse como una actividad humana de matematización progresiva: una ascensión “de lo concreto a lo general”.

Sierpínska (2002) recoge ambas visiones al proponer una relación de complementariedad, más que de dicotomía, entre el PT y el PP. En su formulación, cada uno de estos modos puede actuar como un obstáculo epistemológico para el otro (en el sentido bachelardiano): lo práctico puede impedir la generalización teórica, y lo teórico puede obstaculizar la intuición o la acción eficiente. No obstante, esta complementariedad no es patológica, sino constitutiva de la comprensión matemática.

Los modos de pensar un fragmento matemático

Un fragmento F de la matemática (por ejemplo, una recta, una matriz, un número complejo o una función) puede ser comprendido desde distintos MP, cuya configuración responde a la epistemología y ontología de F y al tipo de razonamiento que este convoca. En sus primeros desarrollos teóricos, Sierpinska (2000) distinguió tres modos principales asociados al álgebra lineal: (i) MP-SG: los objetos son percibidos y manipulados como entidades visuales o espaciales; el pensamiento opera mediante descripciones figurales; (ii) MP-AA: los objetos se definen mediante relaciones numéricas o expresiones simbólicas que permiten el cálculo y (iii) MP-AE: los objetos se conciben como instancias de estructuras abstractas caracterizadas por propiedades y relaciones generales.

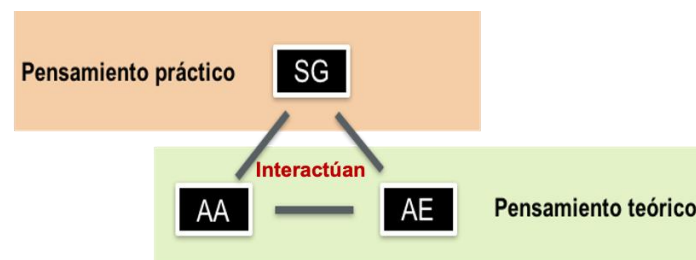
Sin embargo, las investigaciones posteriores (Campos y Parraguez, 2021; Parraguez et al., 2021; Pinto-Rojas y Parraguez, 2017; Randolph y Parraguez, 2022; Vidal-Szabó et al., 2023) han mostrado que no existe un repertorio fijo de modos, sino que estos se configuran según la epistemología y la naturaleza del fragmento estudiado.

Por tanto, los MP deben entenderse como configuraciones flexibles de actividad cognitiva y semiótica, que modelan las distintas formas en que los sujetos se relacionan con los objetos matemáticos dentro de un contexto epistémico determinado. La comprensión profunda de un concepto matemático implica la interacción dinámica entre estos modos y la capacidad de movilizarse entre ellos, articulando representaciones figurales, simbólicas, operacionales y estructurales.

Este principio de interactividad cognitiva constituye el núcleo del modelo teórico desarrollado en esta línea de investigación y sustenta la identificación de articuladores cognitivos, es decir, los elementos matemáticos (representaciones, propiedades o relaciones) que permiten el tránsito entre modos.

Figura 1

Interacción entre los MP según el fragmento matemático (Sierpinska, 2000; Parraguez et al., 2021).



Esta apertura conceptual en torno a los MP permitió evolucionar hacia un modelo cognitivo más amplio, capaz de describir no solo las formas de pensamiento, sino las condiciones epistémicas y cognitivas que las sostienen.

De la teoría a la modelación cognitiva

En los últimos años, la teoría de los MP se ha extendido desde el ámbito del álgebra lineal hacia otros fragmentos de la matemática, incluyendo las cónicas, los sistemas numéricos, la derivada y los grupos. Esta expansión ha requerido operacionalizar la teoría mediante instrumentos de investigación que hagan visible la interacción entre MP.

El concepto de “articulador” (Parraguez et al., 2013) surge precisamente con este propósito: designa un elemento matemático (una representación, propiedad o relación) que permite el tránsito entre MP, como por ejemplo la ecuación que conecta la representación gráfica y simbólica de una cónica (Bonilla y Parraguez, 2013). La identificación de estos articuladores ha permitido pasar de una teoría descriptiva a una teoría modeladora del pensamiento matemático, capaz de orientar el diseño de tareas y trayectorias de aprendizaje.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

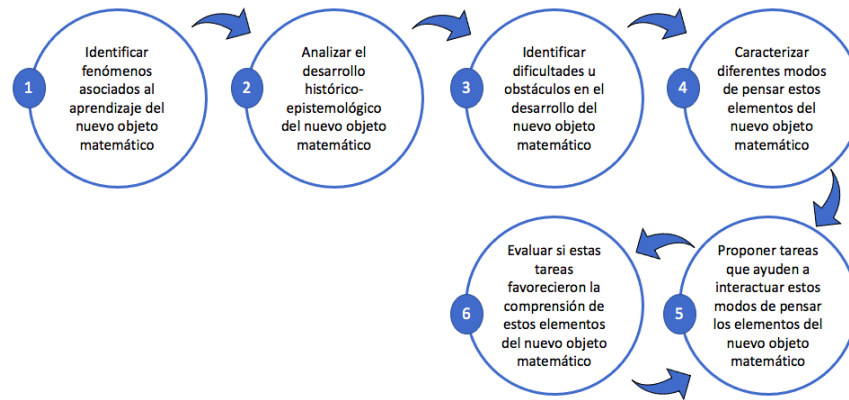
De la teoría a la investigación empírica

La línea de investigación desarrollada en torno a la teoría de los MP ha transitado, entre 2010 y 2025, desde estudios de adherencia —centrados en aplicar directamente la teoría de Sierpinska (2000, 2005)— hacia estudios de variedad, que amplían su alcance metodológico y teórico a nuevos dominios matemáticos. Esta evolución ha requerido un proceso sostenido de operacionalización teórica, orientado a definir categorías observables y estrategias de análisis coherentes con los supuestos epistemológicos del marco original.

La operacionalización se ha sustentado en tres decisiones metodológicas fundamentales (Figura 2): (a) *Definir el fragmento matemático (F)* a investigar, considerado como un subconjunto coherente de la matemática (por ejemplo, la noción de dimensión, las cónicas, los sistemas numéricos o el concepto de grupo), (b) *Diseñar tareas matemáticas ad-hoc* que favorezcan la manifestación de distintos modos de pensar F y (c) *Construir instrumentos de análisis* —como cuestionarios, protocolos de entrevista o rejillas de codificación— que permitan identificar evidencias del tránsito entre modos.

Figura 2

Ruta de evolución de la investigación sobre los Modos de Pensamiento en un fragmento F de la matemática (Parraguez et al., 2024, pp.26).



Enfoque metodológico general: estudios de caso y diseño exploratorio

Los primeros estudios (2010–2015) adoptaron un *diseño de caso instrumental* (Stake, 2010), centrado en analizar la comprensión de conceptos de álgebra lineal en grupos pequeños de estudiantes universitarios. Este enfoque permitió profundizar en las estrategias cognitivas y los modos de representación empleados al resolver tareas específicas.

En una segunda etapa (2016–2020), la línea evolucionó hacia diseños *exploratorios-descriptivos*, en los que se compararon MP en distintos fragmentos matemáticos y se comenzaron a formular y determinar articuladores cognitivos: elementos de la matemática (como la ecuación, la gráfica o una propiedad) que posibilitan el tránsito entre MP.

Desde 2020, los proyectos se orientan hacia la consolidación de un *modelo cognitivo integrador* (MP + articuladores) y la aplicación de metodologías mixtas, que combinan el análisis cualitativo de respuestas escritas y entrevistas con análisis cuantitativos de tendencias cognitivas. Este movimiento refleja el paso de una investigación centrada en casos individuales a una que busca patrones de interacción cognitiva en poblaciones más amplias.

Instrumentos y procedimientos de análisis

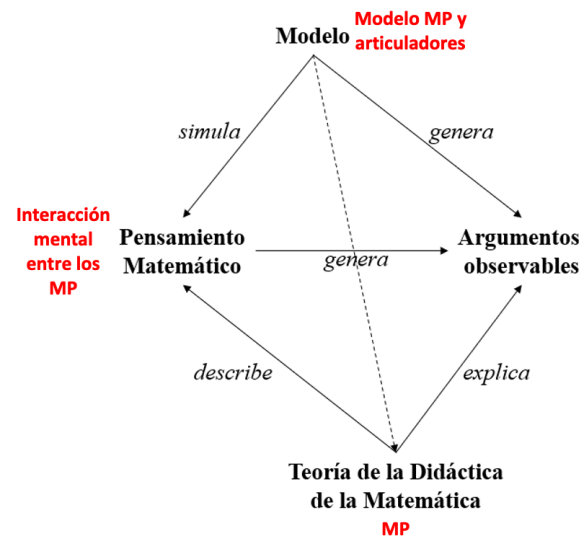
El proceso metodológico en los estudios recientes puede describirse mediante tres fases recurrentes: (a) *Análisis a priori*: Identificación del fragmento matemático y de los MP esperables que se definen en función del análisis epistemológico del fragmento y pueden diferir de los MP clásicos propuestos originalmente por Sierpinska (2000); elaboración de tareas y predicción de articuladores hipotéticos entre modos; revisión teórica y validación por pares (expertos en Didáctica de la Matemática), (b) *Aplicación empírica*: Implementación de las tareas en entornos naturales (aula universitaria o formación docente); recogida de datos

mediante cuestionarios, entrevistas y observaciones videograbadas y (c) *Análisis a posteriori*: codificación de evidencias de los modos de pensar (SG, AA, AE y otras configuraciones derivadas según el fragmento en estudio) y de los articuladores emergentes; triangulación entre fuentes de datos y construcción de categorías de interpretación.

El método se articula bajo la lógica de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995), donde el análisis a priori y posteriori se conciben como momentos complementarios de validación teórica y empírica. Sin embargo, la línea incorpora además el principio de Exploración Heurística Evolutiva (EHE), que reconoce que los marcos teóricos también evolucionan a la luz de los datos empíricos (Figura 3).

Figura 3

Modelo cognitivo de los Modos de Pensamiento y su articulación mediante articuladores (Parraguez et al., 2021, pp.318).



Validación y consistencia metodológica

Para garantizar la validez interna y externa de los resultados, cada estudio ha considerado distintos criterios metodológicos: (a) *Triangulación de fuentes y métodos*, combinando entrevistas semiestructuradas, registros escritos y observaciones de aula, (b) *Revisión por pares expertos*, tanto en el diseño de las tareas como en la interpretación de los datos y (c) *Reiteración evolutiva*, que permite contrastar los resultados de un estudio con los de investigaciones previas y ajustar las categorías de análisis.

Esta rigurosidad ha permitido sostener la coherencia teórica de la línea, al tiempo que se amplían los contextos de aplicación de la teoría de los MP.

En síntesis, la metodología desarrollada constituye una contribución original al campo de la Didáctica de la Matemática: no se limita a aplicar un marco existente, sino que lo *expande como modelo cognitivo validado empíricamente*, capaz de describir y explicar la comprensión matemática en diversos dominios.

RESULTADOS

De los estudios de adherencia: operacionalizar la teoría de Sierpiska del 2010 al 2015

Los primeros trabajos o estudios de adherencia (2010-2015) tuvieron como propósito reconocer y describir evidencias de los MP en el aprendizaje del álgebra lineal, siguiendo los postulados de Sierpiska (2000). En esta etapa inicial, se exploró el potencial explicativo de los modos SG, AA y AE para caracterizar la comprensión de conceptos abstractos.

Maturana y Parraguez (2012) investigó el *concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real*, con estudiantes de ingeniería y ciencias. Su análisis mostró un predominio del modo AA, asociado al cálculo y la manipulación de fórmulas, junto con una escasa articulación con los modos SG y AE, necesarios para otorgar significado estructural al concepto. Este hallazgo impulsó el diseño de tareas orientadas a favorecer la interacción entre modos.

Bonilla y Parraguez (2013) abordó *la elipse* con estudiantes de enseñanza media, evidenciando que la comprensión de las cónicas exige la coordinación simultánea de los tres modos de pensamiento (Figura 4). Los resultados revelaron que los estudiantes que transitaron entre representaciones gráficas, simbólicas y estructurales desarrollaron una comprensión más integrada del objeto matemático.

Figura 4

Modos de Pensar la Elipse (Bonilla y Parraguez 2013, pp.45)

<div data-bbox="397 1339 581 1396" data-label="Section-Header"> <p>Sintético – Geométrico</p> </div> <div data-bbox="397 1417 527 1680" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="673 1339 857 1396" data-label="Section-Header"> <p>Analítico – Aritmético</p> </div> <div data-bbox="673 1438 868 1522" data-label="Text"> <p>“Conjunto de pares ordenados que satisfacen la ecuación”</p> </div> <div data-bbox="706 1575 820 1638" data-label="Equation-Block"> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ </div>	<div data-bbox="998 1339 1182 1396" data-label="Section-Header"> <p>Analítico – Estructural</p> </div> <div data-bbox="966 1417 1209 1564" data-label="Text"> <p>“Lugar geométrico de todos los puntos del plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (focos) es siempre constante positiva”</p> </div> <div data-bbox="1031 1575 1144 1680" data-label="Image"> </div>
---	--	---

Ampliación a nuevos fragmentos matemáticos: consolidar la interacción entre modos del 2015 al 2020

Durante esta etapa, los estudios se centraron en otros dominios de la matemática con el fin de examinar la validez de la teoría más allá del álgebra lineal.

Astorga y Parraguez (2014, 2019) extendió el análisis a *las cónicas en distintas métricas* (euclidiana, norma-1 e infinita). Los resultados evidenciaron que el tránsito entre los modos SG y AE requiere de un modo intermedio AA, que actúa como articulador entre la forma gráfica y la estructura algebraica. Este hallazgo dio origen al concepto de articulador cognitivo, entendido como un elemento matemático que facilita el paso de un modo a otro.

Campos y Parraguez (2019) investigó la comprensión de *sistemas de ecuaciones lineales* en estudiantes de educación media. Observó que quienes no lograban establecer una conexión desde el modo SG hacia el modo AA —por ejemplo, entre la intersección de rectas y la solución algebraica— presentaban dificultades al resolver sistemas de mayor complejidad. En cambio, los estudiantes que transitaban entre los modos mostraban una comprensión más profunda y flexible del conjunto solución.

En conjunto, estos resultados sustentan la *hipótesis central*: la comprensión matemática no reside en un modo aislado, sino en la interacción coordinada entre MP mediada por articuladores cognitivos.

De la operacionalización al modelo cognitivo del 2015 al 2025

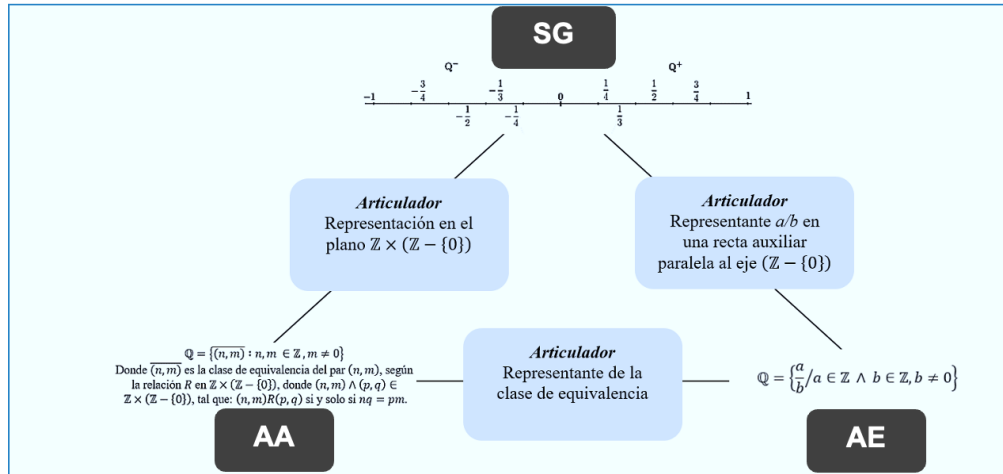
En la etapa más reciente, la línea de investigación se ha consolidado en torno a un modelo cognitivo integrador (MP + articuladores), que describe la comprensión matemática como una interacción entre modos mediada por elementos articuladores (Parraguez et al., 2024).

Pinto-Rojas y Parraguez (2017) aplicó la teoría al concepto de *derivada en su perspectiva local*, incorporando el marco MTSK (Mathematical Knowledge for Teaching) para el análisis del conocimiento del profesor. Sus resultados mostraron articuladores explícitos entre los modos Sintético-Geométrico-Convergente (SGC), Analítico-Operacional (AO) y AE, y evidenciaron fortalezas y vacíos en la comprensión de docentes y estudiantes.

Campos y Parraguez (2021) extendió el modelo al concepto de *grupo*, en el que aparece el modo Analítico-Combinatorio (AC); identificando articuladores como la tabla de doble entrada y la coloración de composiciones, los cuales permiten transitar entre los modos AC y AE, al tiempo que promueven el desarrollo de intuiciones sobre subgrupos.

Figura 5

Modelo de interacción entre modos de pensamiento en la comprensión de los números racionales (Parraguez et al., 2021, pp.334).



Parraguez et al., (2021), aplicaron la teoría a los *sistemas numéricos*, en particular a los números racionales (Figura 5) y complejos (Randolph y Parraguez, 2022). En estos estudios se propuso un modelo para la comprensión de \mathbb{Q} y \mathbb{C} basado en la interacción de los modos SG, AA y AE, mostrando que la conceptualización de estos sistemas excede su tratamiento como simples conjuntos: implica reconocer su estructura algebraica, de orden y topológica.

Articuladores cognitivos y funciones ejecutivas: nuevos horizontes

Las investigaciones más recientes exploran la vinculación entre los MP y las funciones ejecutivas básicas, en particular la inhibición cognitiva. Este constructo, proveniente de la neurociencia cognitiva, se refiere a la capacidad de suprimir respuestas automáticas o irrelevantes para atender a los elementos esenciales de una tarea.

En contextos matemáticos, una adecuada capacidad de inhibición se ha asociado con la habilidad para cambiar de modo de pensamiento o mantener activa una representación estructural mientras se ejecutan procedimientos prácticos. Los hallazgos preliminares (Randolph et al., 2025) muestran que los estudiantes con mayor control inhibitorio manifiestan una mayor flexibilidad para articular SG, AA y AE, lo que abre una vía prometedora para integrar la teoría de los MP con enfoques cognitivo-neuropsicológicos.

Síntesis de los resultados

En conjunto, los resultados obtenidos durante más de una década permiten afirmar que: (a) La teoría de los MP es operacionalizable empíricamente mediante tareas diseñadas ad-hoc, (b) La interacción entre modos, más que la prevalencia de uno sobre otro, explica los niveles de comprensión alcanzados, (c) Los articuladores cognitivos constituyen un avance teórico

y metodológico que transforma la teoría en un modelo explicativo de la comprensión matemática y (d) La línea ha evolucionado hacia un enfoque de modelación cognitiva, capaz de integrar dimensiones teóricas, didácticas y neurocognitivas.

CONCLUSIONES

A lo largo de más de una década, la teoría de los MP (Sierpinska, 2000, 2002, 2005) ha demostrado ser un marco teórico sólido y adaptable para comprender la construcción del conocimiento matemático en distintos niveles educativos. La línea de investigación desarrollada en el Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso ha permitido ampliar esta teoría más allá de sus formulaciones iniciales, transformándola en un modelo cognitivo de carácter explicativo y predictivo, sustentado en evidencia empírica y metodológica.

En primer lugar, las investigaciones han mostrado que los modos de pensamiento no constituyen un repertorio cerrado, sino configuraciones cognitivas dependientes de la epistemología del fragmento matemático. Así, los modos clásicos (SG, AA, AE) se reorganizan o diversifican —como en los casos de los modos SGC, AO o AC— según las relaciones conceptuales, representacionales y semióticas que cada dominio matemático convoca. Estos hallazgos consolidan la noción de que los MP se reestructuran según el dominio matemático, confirmando la flexibilidad epistemológica del modelo.

La comprensión, por tanto, no radica en la prevalencia de un modo sobre otro, sino en la coordinación flexible y dinámica entre modos mediada por articuladores cognitivos: elementos matemáticos (representaciones, propiedades o relaciones) que permiten transitar entre formas de pensamiento y mantener la coherencia conceptual.

Desde esta perspectiva, la comprensión matemática se entiende como un proceso de modelación cognitiva, en el cual el sujeto articula representaciones figurales, simbólicas, operacionales y estructurales para construir significado. Los MP se consolidan así como una herramienta de análisis del pensamiento matemático y, al mismo tiempo, como un modelo generativo para el diseño de tareas y trayectorias de aprendizaje que promuevan el tránsito entre modos.

Proyección teórica: hacia una modelación cognitiva del pensamiento matemático

El desarrollo de la línea de investigación ha permitido reformular la teoría como un modelo de modelación cognitiva (Parraguez et al., 2021; Randolph y Parraguez, 2022; Randolph et al., 2025), que explica cómo se activan, coordinan e inhiben los modos en función de la estructura conceptual del fragmento. Este modelo integra tres niveles interdependientes: (i) el nivel cognitivo, referido a la activación y coordinación de modos; (ii) el nivel epistémico, que describe la organización del conocimiento matemático en cada dominio; y (iii) el nivel didáctico, vinculado al diseño de situaciones que propicien la interacción entre modos.

Proyección metodológica: del análisis a la validación empírica

Metodológicamente, la línea ha evolucionado desde estudios de caso descriptivos hacia una investigación sistemática de carácter heurístico-evolutivo, que combina análisis a priori y a posteriori, triangulación de fuentes y validación de instrumentos. Esta madurez metodológica ha permitido extender el modelo a diversos fragmentos matemáticos —álgebra lineal, cónicas, derivada, grupos, conjuntos cíclicos, números racionales y complejos— y garantizar su coherencia interna.

El desarrollo del concepto de articulador cognitivo se proyecta, además, como una categoría analítica transferible a otros marcos teóricos, como la Teoría APOE, abriendo nuevas vías para la integración de perspectivas en Didáctica de la Matemática.

Proyección educativa interdisciplinaria

En el ámbito educativo, los MP ofrecen un potencial significativo para diseñar rutas de aprendizaje que integren lo teórico y lo práctico, y para adaptar dichas rutas a las epistemologías propias de cada dominio matemático. En la formación de profesores, permiten identificar qué modos predominan o se ausentan en la comprensión de conceptos fundamentales, favoreciendo la construcción de una enseñanza más reflexiva y epistemológicamente fundamentada.

Por otra parte, la vinculación reciente con las Funciones Ejecutivas Básicas, en especial la inhibición cognitiva, abre una línea de investigación interdisciplinaria entre la Didáctica de la Matemática y la Neurociencia Cognitiva. Inhibir una respuesta automática posibilita mantener representaciones estructurales activas, requisito clave para articular modos de pensamiento distintos. Este diálogo entre Cognición, Neuromatemática y Didáctica de la Matemática fortalece el programa como una propuesta de frontera en el estudio del pensamiento matemático avanzado.

Consideraciones finales

La teoría de los MP ha evolucionado desde su formulación inicial, centrada en el álgebra lineal, hacia un programa de investigación expandido y multidimensional, que articula fundamentos teóricos, metodológicos, empíricos y cognitivos. Su consolidación en Chile, liderada desde el Instituto de Matemáticas de la PUCV, representa una contribución sustantiva al campo internacional de la Didáctica de la Matemática, ofreciendo una visión integradora de cómo se piensa, se enseña y se aprende la matemática como una forma de razonamiento humano y como un campo epistémico en constante reconstrucción.

Declaración de uso ético de herramientas de Inteligencia Artificial

Para apoyar la identificación de referencias bibliográficas actuales, se utilizó la herramienta *ChatGPT* (OpenAI, 2023) a través de la plataforma *Consensus*. Esta herramienta se empleó

para localizar literatura y no intervino en el análisis ni en la interpretación de los resultados obtenidos.

Agradecimientos

Parcialmente financiado por el Proyecto DI REGULAR PUCV 2025, COD. PROYECTO: 039.717/2025

Referencias

- Artigue, M. (1995). Engineering didactics research: Achievements and issues. En R. Sutherland, F. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 133–157). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-011-0307-7_9
- Astorga, M., y Parraguez, M. (2014). Comprensión de las cónicas a través de los modos de pensamiento: Avance de investigación. *Revista Chilena de Educación Científica*, 13(2), 19–24.
- Astorga, M., y Parraguez, M. (2019). Las cónicas en métricas no euclidianas: Una mirada desde la teoría de los modos de pensamiento. *Revista Transformación*, 15(1), 39–51.
- Bonilla, D., y Parraguez, M. (2013). *La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento*. Editorial Académica Española.
- Campos, S., y Parraguez, M. (2019). Comprensión de sistemas de ecuaciones lineales: Un estudio de caso en el contexto escolar en Chile. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, 21(3), 347–368.
- Campos, S., y Parraguez, M. (2021). Los modos de pensar el concepto de grupo desde los modos de pensamiento: El caso del grupo de orden 2. En A. Figueroa, G. Meza, M. Moya, S. Navarrete, M. Silva, y A. Quiroz (Eds.), *Actas XXIV JNEM* (p. 194–199). SOCHIEM, EEMIE-UCSH. ISBN 978-956-9805-03-5
- Dewey, J. (1993). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. D. C. Heath and Company.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. D. Reidel Publishing Company.
- Gravemeijer, K. (1997). The theory of realistic mathematics education. En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 389–404). Psychology Press.
- Hume, D. (1978). *A treatise of human nature*. Oxford University Press. (Trabajo original publicado en 1739).
- Kant, I. (1998). *Crítica de la razón práctica* (J. R. Cid, Trad.). Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1788).
- Maturana, I., y Parraguez, M. (2012). Los modos de pensamiento en que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios. *Revista de Educación Matemática RECHIEM*, 6(1), 173–191.
- OpenAI. (2023). *ChatGPT* (Mar 14 version) [Modelo de lenguaje]. Recuperado el 03 de noviembre de 2025 de <https://chat.openai.com/>
- Parraguez, M., Bonilla, D., y Randolph, V. (2021). Un modelo para la comprensión del sistema de los números racionales: Un estudio de casos en la formación de profesorado. En C. Guerrero-

- Ortiz, A. Morales-Soto, y E. Ramos-Rodríguez (Eds.), *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática: Modelación Matemática* (pp. 313–348). Graó.
- Parraguez, M., Bonilla, D., y Solanilla, L. (2019). Aprendizaje de las cónicas en la geometría del taxista mediante una secuencia didáctica basada en los modos de pensamiento de Sierpinska. En R. Olfos, E. Ramos, & D. Zakaryan (Eds.), *Aportes a la práctica docente desde la didáctica de la matemática: Formación docente* (pp. 165–202). Graó.
- Parraguez, M., Randolph, V., Campos, S., y Pinto-Rojas, I. (2024). Adherencia y variedad a la teoría de los modos de pensamiento: Una década de evolución de su metodología de investigación. En S. Estrella, M. Parraguez, y R. Olfos (Eds.), *Pensamiento matemático específico: Aportes desde la didáctica de la matemática para investigar, innovar y mejorar en y sobre la práctica docente* (Cap. 4). Graó.
- Piaget, J. (1955). *The child's construction of reality*. Routledge y Kegan Paul.
- Pinto-Rojas, I., y Parraguez, M. (2017). Articulators for thinking modes of the derivative from a local perspective. *IEJME – Mathematics Education*, 12(10), 873–898.
- Randolph, V., y Parraguez, M. (2022). *Comprensión del sistema de los números complejos desde los modos de pensamiento*. Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Randolph, V., Gómez, D., y Parraguez, M. (2025). Prospective mathematics teachers' performance on complex numbers tasks: Revealing the real number bias. En C. Cornejo, P. Felmer, D. M. Gómez, P. Dartnell, P. Araya, A. Peri, y V. Randolph (Eds.), *Proceedings of the 48th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: General Contributions*. PME.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209–246). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0844-0_11
- Sierpinska, A. (2002). On the relation between theoretical and practical thinking in mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 239–272. <https://doi.org/10.1023/A:1021217808653>
- Sierpinska, A. (2005). Complementarity in theoretical and practical thinking. *Philosophia Mathematica*, 13(2), 217–234. <https://doi.org/10.1093/philmat/nki011>
- Stake, R. E. (2010). *The art of case study research*. Sage Publications.
- Steinbring, H. (1991). *Mathematical knowledge and classroom interaction: The theory of the objectification of knowledge*. Springer.
- Vidal-Szabó, P., Parraguez, M., Bonilla, D., y Campos, S. (2023). Modos de pensar el conjunto Z_4 en docentes que enseñan álgebra en los primeros años escolares. *Revista Educación Matemática*, 35(2), 170–195.

IV. UNIVERSIDAD CENTRAL DE CHILE

La Universidad Central de Chile (UCEN) es una institución de educación superior con más de 43 años de historia, reconocida por su compromiso con la formación integral de profesionales, la responsabilidad social, la equidad y el desarrollo del pensamiento crítico.

Fundada en 1982, fue una de las primeras universidades privadas laicas del país y ha mantenido desde sus orígenes una clara vocación pública, plasmada en su quehacer académico, investigativo y de vinculación con el medio. Cuenta con acreditación institucional y una oferta académica amplia y diversa en sus sedes de Santiago y La Serena.

La UCEN ha consolidado una trayectoria formativa sólida en el ámbito de las pedagogías y las ciencias sociales, destacándose por el fortalecimiento de la formación docente en matemática, el fomento de la investigación educativa y el compromiso con una educación inclusiva, participativa y de calidad.

ILUSTRACIÓN 1. Edificio Vicente Kovacevic II. Sede Santiago.



Ser la universidad anfitriona de las XXIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática refleja el espíritu colaborativo y reflexivo de nuestra institución, así como su compromiso con el desarrollo de la educación matemática en Chile.

Atentamente

Comité Organizador XXIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática

<p>Dra. Daniela Araya Bastías Directora de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.</p>	<p>Dr. Nicolás Sánchez Acevedo Académico de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.</p>	<p>Mg. Claudio Zamorano Sánchez Académico de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.</p>	<p>Mg. Carlos Gallegos Lastra Académico de la carrera Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile.</p>
<p>Dra. Tania Andrade Vega Académica de la carrera de Pedagogía en Educación General Básica, mención matemática, Universidad Central de Chile.</p>	<p>Dr. Sergio Morales Candia Académico Universidad de Concepción, vicepresidente de SOCHIEM.</p>	<p>Mg. Javiera Muriel Herrera Pérez Académica de la carrera de Pedagogía en Matemática y Estadística, Universidad Central de Chile</p>	